Note Title 5/19/2020

سیالات ۱ - سه‌شنبه ۹۹/۲/۳۰

جریان تراکم ناپذیر غیرلزج:

معادلات ناویر استوکس برای شاره تراکم ناپذیر،

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{V}}_{\text{اثرات لزجت} \approx 0} + \rho \vec{g}$$

معادلات حاکم بر جریان غیرلزج

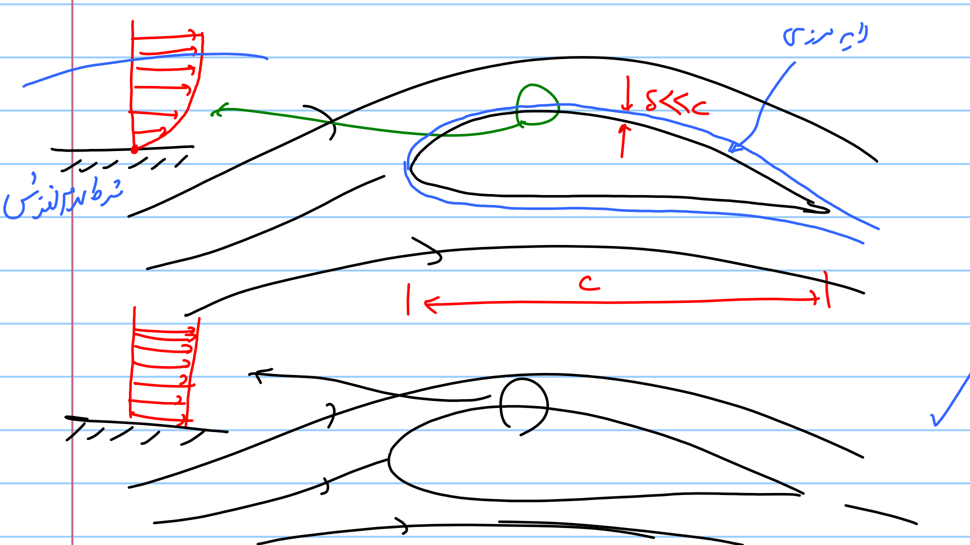
معادلات اویلر $\leftarrow$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$

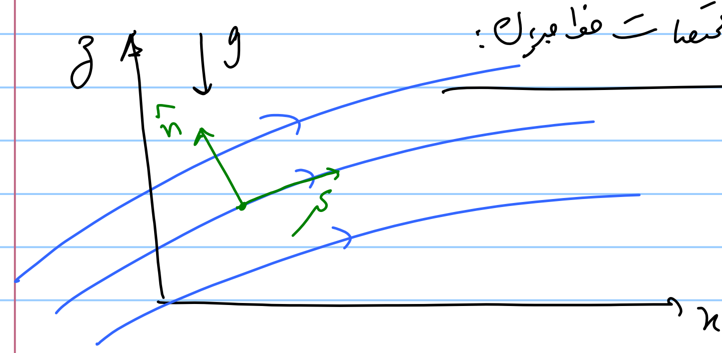
$$x: \quad \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$y: \quad \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$z: \quad \rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$



معادلات اویلر در مختصات خط جریان:



در جهت s : $\vec{V} = V_s \hat{e}_s$

$$\Rightarrow \rho \frac{DV_s}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s$$

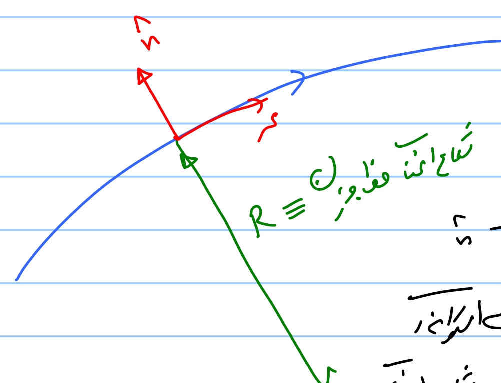
$$, \quad \frac{DV_s}{Dt} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \cancel{g_s} \qquad g \frac{\partial z}{\partial s}$$

معادله اویلر در امتداد خط جریان :

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s}} \quad \checkmark$$

معادله اویلر در جهت عمود بر خط جریان



برای رسیدن به معادله اویلر در جهت n
کافیست معادله اویلر در مختصات استوانه‌ای
در راستای r برای خط جریانی با شعاع انحنا R
نوشته شود.

$$\frac{DV_r}{Dt} = a_r = \cancelto{0}{\frac{\partial V_r}{\partial t}} + \cancelto{0}{V_r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cancelto{0}{\frac{\partial V_r}{\partial \theta}} + \cancelto{0}{V_z} \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}$$

$$\Rightarrow a_r = a_n = -\frac{V^2}{R}$$

لذا معادله اویلر در جهت عمود بر خط جریان خواهد شد :

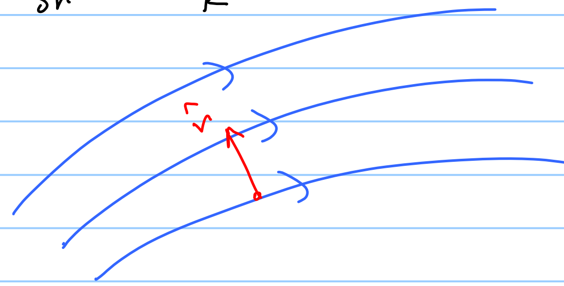
$$\frac{DV_n}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g_n$$

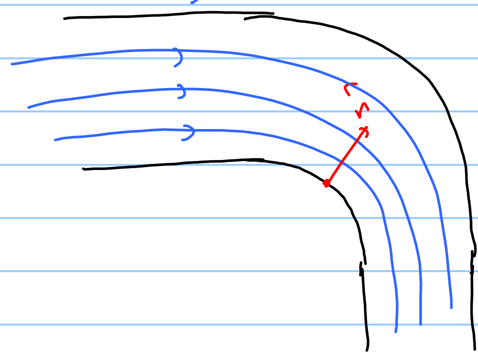
$$\Rightarrow -\frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + \cancel{g_n} \qquad -g \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{V^2}{R}}$$

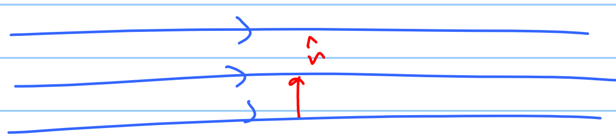
برای حالتی که اثرات شتاب جانب مرکز و ویسکوزیته ناچیز باشد :

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R}$$





$$\frac{\partial P}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R}$$



از معادله اویلر در امتداد خط جریان برای جریان دائم و تراکم‌ناپذیر :

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial V_s}{\partial t}}}_{0\ \text{دائم}} + \underbrace{V \frac{\partial V}{\partial s}}_{\frac{\partial (V^2/2)}{\partial s}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s}$$

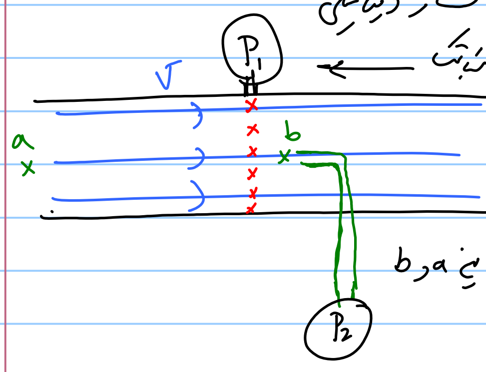
اگر در جهت s انتگرال‌گیری شود ،

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{Const.}}$$ برنولی :

تعریف :

فشار استاتیک ، فشار سکون ، فشار دینامیکی

قرائت فشار استاتیک



برنولی بین a و b $\Rightarrow \frac{P_a}{\rho} + \frac{V_a^2}{2} + \cancel{gz_a}$

$$= \frac{P_b}{\rho} + \cancel{\frac{V_b^2}{2}}^{\,0} + \cancel{gz_b}$$

$$\Longrightarrow P_b = P_a + \frac{1}{2}\rho V_a^2 \equiv \text{فشار سکون}$$

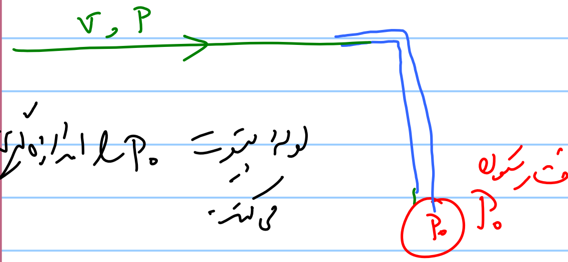
فشار استاتیک

stagnation pressure

$P, V \rightarrow$

$$\Longrightarrow \underset{\text{فشار سکون}}{P_0} = \underset{\text{فشار استاتیک}}{P} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho V^2}_{\text{فشار دینامیکی}}$$

Pitot tube لوله پیتوت :



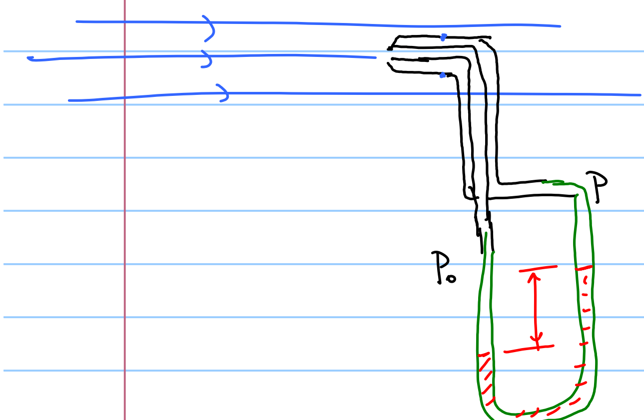
لوله پیتوت P_0 را اندازه‌گیری می‌کند.

$$P_0 = P + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$\Longrightarrow \frac{2(P_0 - P)}{\rho} = V^2$$

$$\Longrightarrow V = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\rho}}$$

لوله پیتو استاتیک :



این وسیله

$\Longrightarrow P_0 - P$

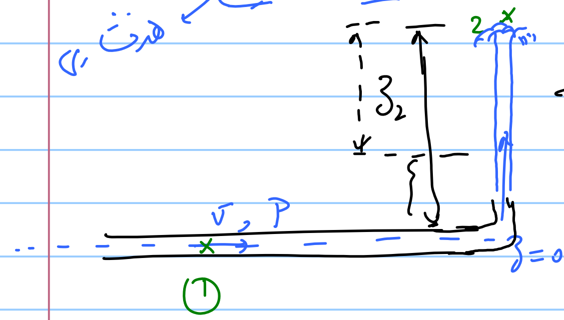
را اندازه‌گیری می‌کند.

$$\Longrightarrow V = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\rho}}$$

خط تراز انرژی و هیدرولیکی :

$$\text{برنولی :} \quad \underbrace{\frac{P}{\rho g}}_{\text{هد فشاری}} + \underbrace{\frac{V^2}{2g}}_{\text{هد سرعتی}} + \underbrace{z}_{\text{هد ارتفاعی}} = Const. = H$$

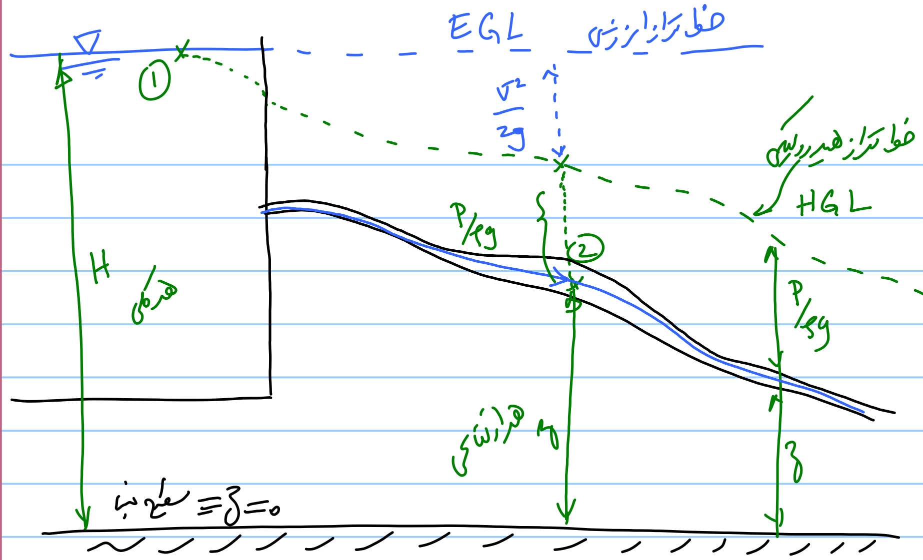
Total Head هد کلی



$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = 0 + 0 + z_2$$

$\cancel{z_1}$: 0

$= H$ هد کلی

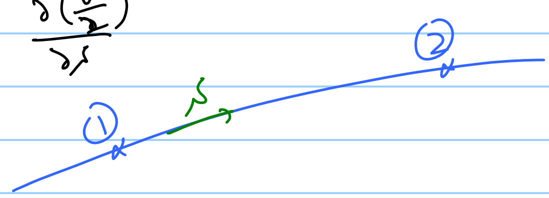


$$\underbrace{\cancel{\frac{P_1}{\rho g}}^{\,0}+\cancel{\frac{V_1^2}{2g}}^{\,0}+z_1}_{H}=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2 \qquad \checkmark$$

معادله برنولی برای جریان غیردائم :

معادله اویلر در امتداد خط جریان :

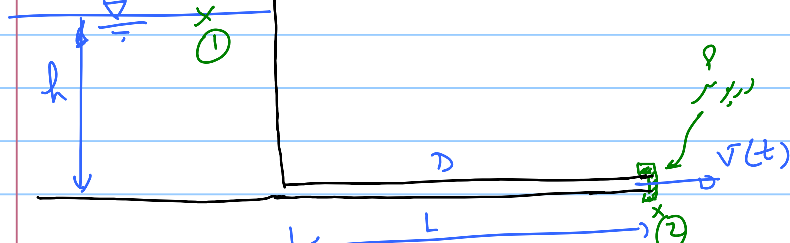
$$\frac{\partial V}{\partial t}+\underbrace{V\frac{\partial V}{\partial s}}_{\frac{\partial\left(\frac{V^2}{2}\right)}{\partial s}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s}-g\frac{\partial z}{\partial s}$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2+\int_1^2\frac{\partial V}{\partial t}\,ds}$$

معادله برنولی غیردائم .

مثال : تانک مخزن بزرگ مانند شکل را در نظر بگیرید. دریچه خروجی لوله بطور ناگهانی برداشته می شود. سرعت جریان درون لوله را نسبت به زمان بدست آورید.

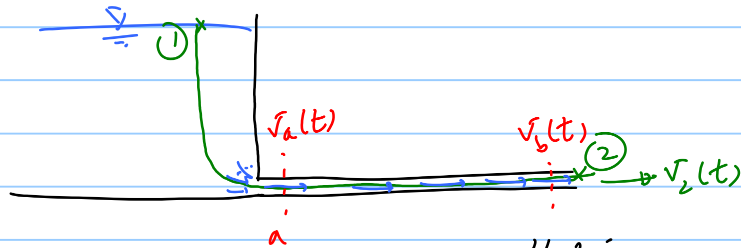


برا حالت دائم: $\underbrace{\cancel{\frac{P_1}{\rho}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{V_1^2}{2}}}_{0}+\underbrace{\cancel{g z_1}}_{h}=\underbrace{\cancel{\frac{P_2}{\rho}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{V_2^2}{2}}}_{V}+\underbrace{\cancel{g z_2}}_{0}$

$$\Rightarrow V=\sqrt{2gh}$$

در حالت گذرا:

$$\underbrace{\cancel{\frac{P_1}{\rho}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{V_1^2}{2}}}_{0}+\underbrace{g z_1}_{h}=\cancel{\frac{P_2}{\rho}}^{\,0}+\cancel{\frac{V_2^2}{2}}^{\,V(t)}+\cancel{g z_2}^{\,0}+\underbrace{\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}\,ds}_{?}$$



$$\underline{\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}\,ds}=\underbrace{\cancel{\int_1^{\text{ورودی لوله}} \frac{\partial V}{\partial t}\,ds}}_{0}+\int_{\text{ورودی لوله}}^{\text{خروجی لوله}} \frac{\partial V}{\partial t}\,ds$$

$$=\frac{\partial V}{\partial t}\int_{\text{ورودی}}^{\text{خروجی}} ds \quad = L\,\frac{\partial V}{\partial t}$$

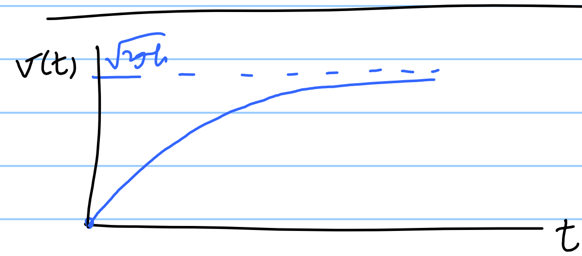
$$\Rightarrow gh=\frac{V^2}{2}+L\frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{2gh-V^2}=\frac{dt}{2L}$$

$$\Rightarrow \int_0^V \frac{dV}{2gh-V^2}=\int_0^t \frac{dt}{2L}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{2gh}}\tanh^{-1}\left(\frac{V}{\sqrt{2gh}}\right)\right]_0^V=\frac{t}{2L}$$

$$\Rightarrow \frac{V(t)}{\sqrt{2gh}}=\tanh\left(\frac{t}{2L}\sqrt{2gh}\right)$$

$$\Rightarrow V(t)=\sqrt{2gh}\,\tanh\left(\frac{t}{2L}\sqrt{2gh}\right)$$

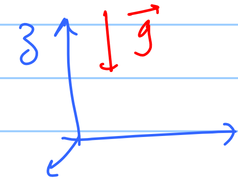


معادله برنولی برای جریان غیرچرخشی:

$\vec{\nabla}\times\vec{V}=0$ جریان غیرچرخشی

فرم برداری معادله داریم:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P+\cancel{\vec{g}}\;-g\vec{\nabla}z$$



از طرفی $$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

$$\Rightarrow\ \cancel{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P-g\vec{\nabla}z$$

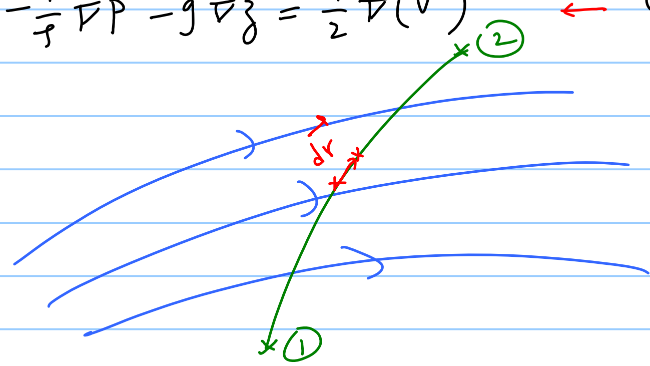
دائم

جریان دائم $\Rightarrow\ -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P-g\vec{\nabla}z=(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$

اتحاد ریاضی: $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}(V^2)-\vec{V}\times\cancel{(\vec{\nabla}\times\vec{V})}$

جریان غیرچرخشی

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P-g\vec{\nabla}z=\frac{1}{2}\vec{\nabla}(V^2)\qquad\leftarrow(*)$$



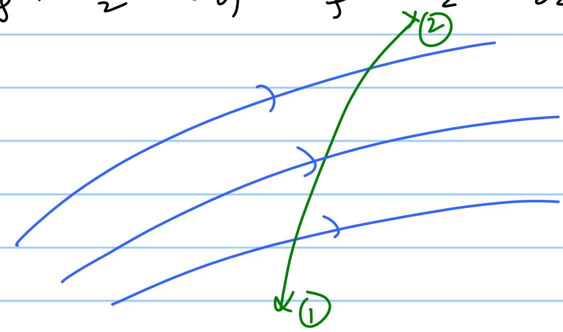
با ضرب داخلی رابطه (*) در $\vec{dr}$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{\rho}\underbrace{\vec{\nabla}P\cdot\vec{dr}}_{\underbrace{\frac{\partial P}{\partial r}dr}_{dP}}-g\underbrace{\vec{\nabla}z\cdot\vec{dr}}_{\underbrace{\frac{\partial z}{\partial r}dr}_{dz}}=\frac{1}{2}\underbrace{\vec{\nabla}(V^2)\cdot\vec{dr}}_{\underbrace{\frac{\partial V^2}{\partial r}dr}_{dV^2}}$$

$$\Rightarrow\ -\frac{dP}{\rho}-g\,dz=d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = Const$$ در امتداد خط ① تا ②

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$



جلسه بعد روز یکشنبه مصادف با سیزده فروردین برگزار نخواهد شد.

جلسه بعد سه‌شنبه ✓