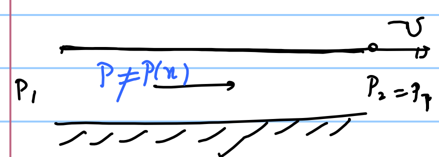
Note Title 4/28/2020

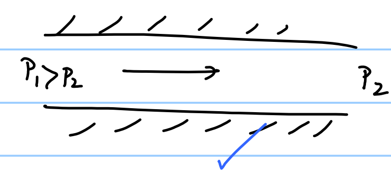
سیالات ۱ـ سه‌شنبه ۹۹/۲/۹

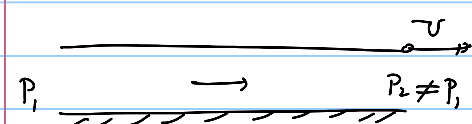
حل تحلیلی معادلات ناویر استوکس:

با اینکه حل معادلات ناویر استوکس به سادگی امکان‌پذیر نیست (به دلیل غیرخطی بودن معادلات مشتقات جزئی و غیرخطی مربوطه) ولی در برخی حالتهای ساده و جریان آرام این کار امکان‌پذیر است.

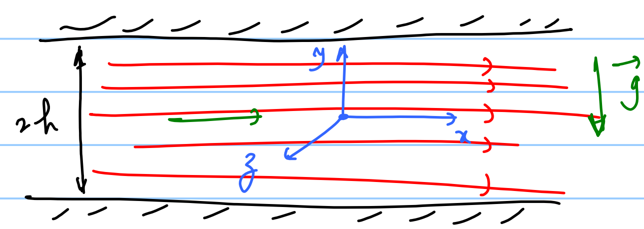
مثال: جریان آرام مابین دو صفحه موازی







جریان آرام، دائم و تراکم‌ناپذیر



$$\vec{V} = (u, 0, 0) \quad , \quad \underline{u = f(y)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

پیوستگی: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0$

برای جریان تراکم‌ناپذیر: $\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{g}$

$$\nabla^2 u = \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{\,0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{\,0}$$

x-mom: $\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + \cancel{g_x}^{\,0}$

y-mom: $\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \cancel{\nabla^2 v}^{\,0} + g_y \rightarrow -g$

z-mom: $\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \cancel{\nabla^2 w}^{\,0} + \cancel{g_z}^{\,0}$

از طرفی $\quad \dfrac{Du}{Dt} = \cancel{\dfrac{\partial u}{\partial t}} + u\cancel{\dfrac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

x-mom: $\quad 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$

تعادل بین دو

y-mom: $\quad 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y} - \rho g \qquad (2)$

z-mom: $\quad 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} \qquad (3)$

$$(3) \Rightarrow P(x,y,z) \neq f(z) \Rightarrow P = P(x,y)$$

$$(2) \Rightarrow P(x,y) = -\rho g y + f_1(x) \qquad (4)$$

$$(4) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \neq f(y)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}y + c_1$$

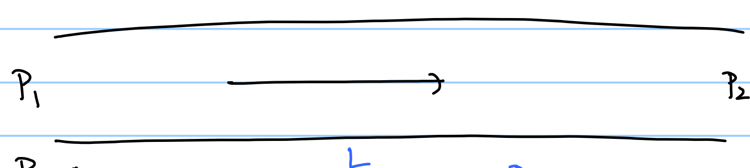
$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}y^2 + c_1 y + c_2$$

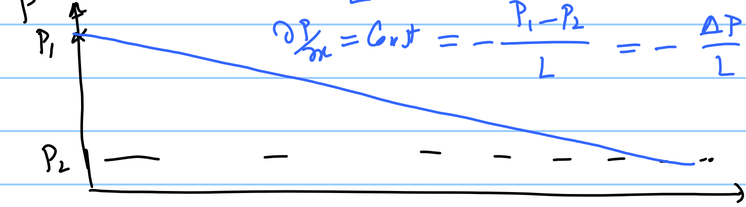
at $y = \pm h$, $u = 0$ $\Rightarrow c_1 = 0$, $c_2 = -\dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)h^2$

$u = \bar{u}$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^2 - h^2) \quad \leftarrow (*)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \neq f(x) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = Const$$





$$\frac{\partial P}{\partial x} = Const = -\frac{P_1 - P_2}{L} = -\frac{\Delta P}{L}$$

$$(4) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = f_1'(x) = -\frac{\Delta P}{L} \Rightarrow f_1(x) = -\frac{\Delta P}{L}x + c_3$$

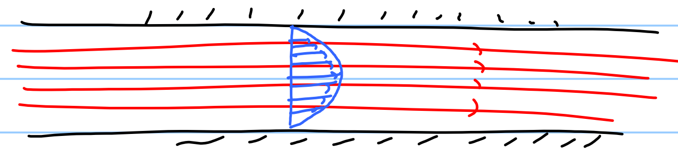
$$\Rightarrow P(x,y) = -\rho g y - \frac{\Delta P}{L} x + C_3$$

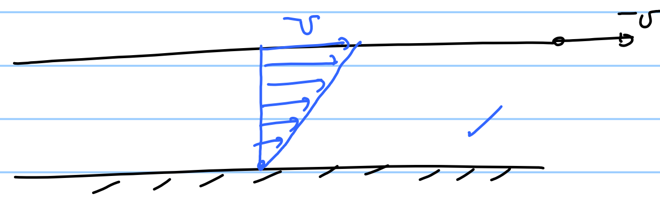
اگر در مبدأ مختصات ف برابر P_0 باشد

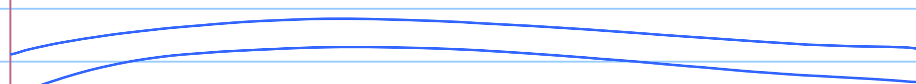
at $(0,0)$, $P = P_0 \Rightarrow C_3 = P_0$

$$\Rightarrow P(x,y) = -\rho g y - \frac{\Delta P}{L} x + P_0$$

$$(*) \Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta P}{L} \left(h^2 - y^2\right)$$

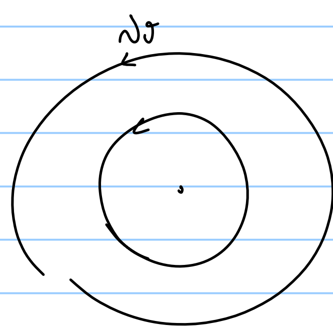






جر گردابه آزاد :

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \Rightarrow v_\theta = \frac{c}{r}$$



2.1) $\vec{v} = axy\,\hat{i} + by^2\,\hat{j}$, $a = 2\ m^{-1}s^{-1}$, $b = -6\ m^{-1}s^{-1}$

$\vec{v} = \vec{v}(x,y) \Rightarrow$ 2D

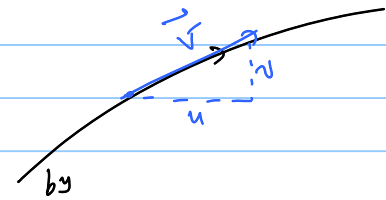
at $(2, \frac{1}{2})$, $u, v = ?$

$u = axy = (2)(2)(\frac{1}{2}) = 2\ m/s$

$$v = by^2 = (-6)(1/2)^2 = -6/4 = -3/2 \ m/s$$

تعیین خط جریانِ عبوری از نقطه $(2, 1/2)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{خط جریان}} = \frac{v}{u}$$

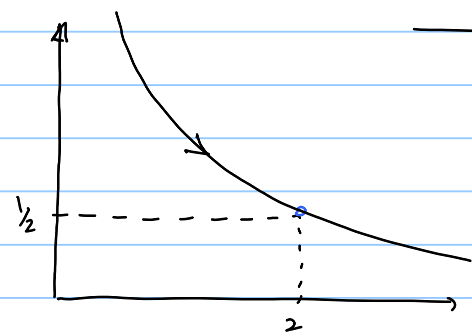


$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{خط جریان}} = \frac{by^2}{axy} = \frac{by}{ax}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{b}{a}\frac{y}{x} \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y}{y_0} = \frac{b}{a}\ln\frac{x}{x_0} \Rightarrow \frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{b/a}$$

$$\frac{b}{a} = -3, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 1/2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-3} = \frac{4}{x^3}$$



2.24) $\vec{V} = \underbrace{ax(1+bt)}_{u}\,\hat{i} + \underbrace{cy}_{v}\,\hat{j}$,

$a = c = 1 \ s^{-1}$, $b = 0.2 \ s^{-1}$

خط اثری که از نقطه $(1,1)$ در فاصله $t=0$ تا $t=3$ عبور می‌کند را
بدست آوریم.

$$u = \frac{dx}{dt} = ax(1+bt) \quad , \quad v = \frac{dy}{dt} = cy$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = a(1+bt)\,dt$$

$$\Rightarrow \ln x = at + ab\frac{t^2}{2} + c_1 = at\left(1+\frac{b}{2}t\right) + c_1$$

$$\frac{dy}{y} = c\,dt \Rightarrow \ln y = ct + c_2$$

باید ذرات را تک‌تک موقعیت کنیم در لحظه‌های مانند τ در نقطه (x_0, y_0) بوده‌اند:

$$\Rightarrow \ln x_0 = a\tau\left(1+\frac{b}{2}\tau\right)+c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = \ln x_0 - a\tau\left(1+\frac{b}{2}\tau\right)$$

$$\ln y_0 = c\tau + c_2 \Rightarrow c_2 = \ln y_0 - c\tau$$

لذا خط اثر برای هر لحظه مانند t به فرم زیر است،

$$\ln x = at\left(1+\frac{b}{2}t\right)+\ln x_0 - a\tau\left(1+\frac{b}{2}\tau\right) \quad (*)$$

$$\ln y = ct + \ln y_0 - c\tau \quad (**)$$

مکان هندسی نقاطی که از $\tau=(-\infty,t)$ از نقطه (x_0,y_0) عبور کرده‌اند.

لذا برای $\tau=(-\infty,3)$ ،

$$t=3 \Rightarrow \ln x = 3a\left(1+\frac{3}{2}b\right)+\ln x_0 - a\tau\left(1+\frac{b}{2}\tau\right)$$

$$\ln y = 3c + \ln y_0 - c\tau \qquad \tau=(-\infty,3)$$

لذا در $\tau=0$

$$\Rightarrow \ln x_1 = \ln x_0 + 3a\left(1+\frac{3}{2}b\right)$$

$$\ln y_1 = \ln y_0 + 3c$$

(x_1,y_1) موقعیت ذره‌ای است که در $t=0$ در موقعیت (x_0,y_0) قرار دارد.

اگر در روابط $(*)$ و $(**)$ ، τ حذف شود.

$$\Rightarrow y=f(x) \longrightarrow$$ معادله خط اثر

این مسیر فضایی از موقعیت (x_0,y_0) تا موقعیت (x_1,y_1) ترسیم شود، خط اثر مربوط به زمان $t=0$ تا $t=3$ ترسیم خواهد شد.