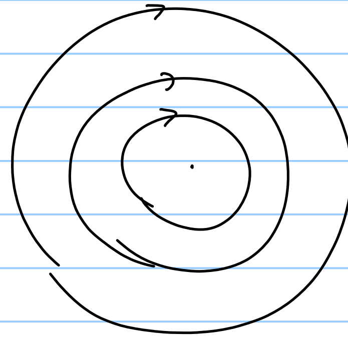
Note Title 4/21/2020

سیالات ۱ - سه‌شنبه ۹۹/۲/۲

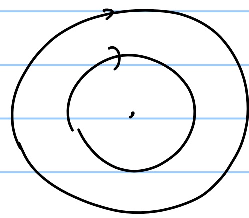
گردابه : Vortex

✓ گردابه اجباری Forced vortex



✓ گردابه آزاد Free vortex

گردابه اجباری : (دوران صلب گونه)



$v_\theta = r\omega$ ، ω = دوران صلب گونه سیال

گردابه آزاد :

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{v} = 0$$

مثال : یک سیال حول z با خطوط کاملاً دایروی را در نظر بگیرید. مقادیر چرخش، تاوائی و گردش را برای دو حالت زیر بدست آورید.

الف - دوران صلب گونه (گردابه اجباری)

ب - گردابه آزاد

$$v_r = 0 \quad , \quad v_\theta = f(r) \quad , \quad v_z = 0$$

برای گردابه اجباری : $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\xi}$

از طرفی $\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$ ، $\omega_z = \frac{1}{2}\xi_z$

از طرفی با توجه به جلسه قبل :

$$\Rightarrow \xi_z = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

برای گردابه اجباری : $v_\theta = r\omega$ ، $\omega = \text{Const.}$

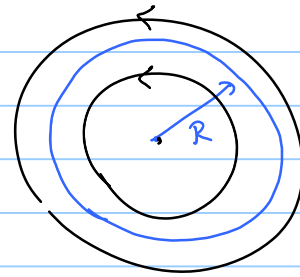
$$\Rightarrow \xi_z = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\omega)}{\partial r} - \frac{1}{r}(0)\right] = 2\omega$$

دو برابر امگا

$$\omega = \omega$$ ← چرخش

چون که گردابه اجباری دارای دوران صلب گونه است.

$$\Gamma = \oint \vec{v}\cdot d\vec{s}$$



$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta \, R \, d\theta$$

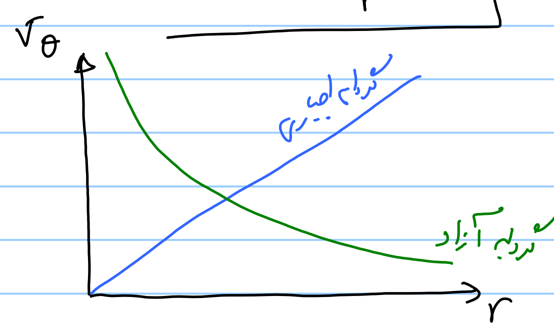
$$= \int_0^{2\pi} R\omega \, R \, d\theta = 2\pi \underbrace{R^2}_{A} \omega = 2\omega A$$

گرداب آزاد:

$$\vec{\xi} = 0 \Rightarrow \xi_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow r v_\theta = \text{Const.} = C$$

$$\Rightarrow v_\theta = \frac{C}{r}$$

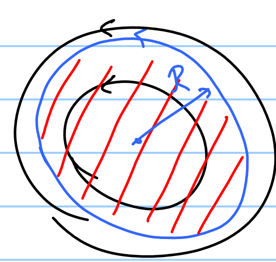


$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\xi} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0$$

طبق قضیه استوکس:

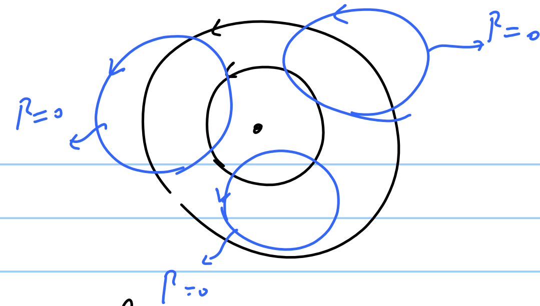
$$\underbrace{\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{s}}_{\Gamma} = \iint_A \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{v})}_{\vec{\xi}}\cdot\hat{n}\, dA$$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta \, R \, d\theta$$



$$= \int_0^{2\pi} \frac{C}{\cancel{R}} \cancel{R} \, d\theta$$

$$\Rightarrow \Gamma = 2\pi C \neq 0 \; !$$



Velocity Potential Function : تابع پتانسیل سرعت

این تابع برای جریان‌های غیرچرخشی تعریف می‌شود.

برای جریان غیرچرخشی $\vec{\nabla}\times\vec{V}=0 \quad\Rightarrow \vec{V}=\vec{\nabla}\phi$

تابع پتانسیل سرعت

اتحاد ریاضی : $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}(\phi)=0$

اگر تابع پتانسیل سرعت، ϕ، معلوم باشد:

$$\vec{V}=\vec{\nabla}\phi \Rightarrow u=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

در مختصات استوانه‌ای:

$$V_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad V_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta},\quad V_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

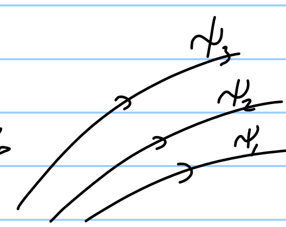
[illegible] تابع جریان : ψ

تابع جریان فقط برای جریان‌های دوبعدی تعریف می‌شود به گونه‌ای که:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

استوانه‌ای $\quad V_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad V_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}$

$\psi=\text{Const} \longrightarrow$ خطوط جریان



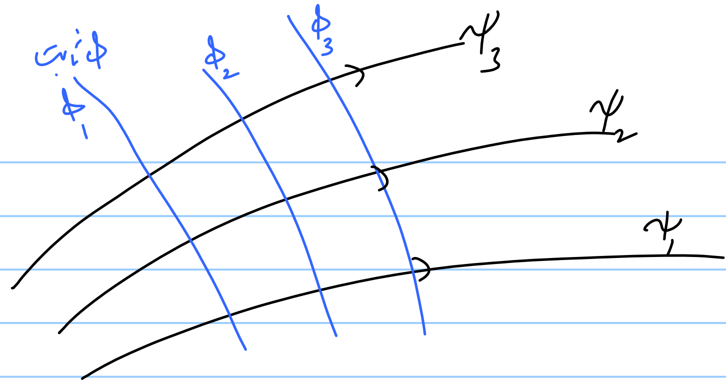
φ ثابت ها بیانگر چه خطوطی هستند؟

$$d\phi=0 \xRightarrow{\text{جریان دوبعدی}} \frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=0$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right)_{\phi\ \text{ثابت}}=-\frac{u}{v}$$

از طرفی $\quad \left.\frac{dy}{dx}\right)_{\psi\ \text{ثابت}}=\frac{v}{u}$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right)_{\phi\ \text{ثابت}}\cdot\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\psi\ \text{ثابت}}=-1$$

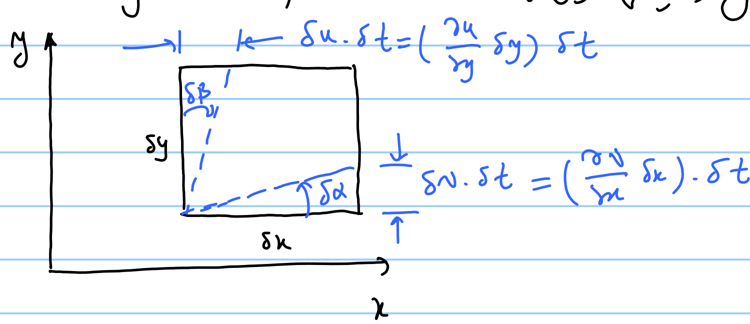


دو نکته مهم:

1) تابع جریان فقط برای جریان‌های (دوبعدی) تعریف می‌شود ولی جریان می‌تواند چرخشی یا غیرچرخشی باشد.

2) تابع پتانسیل فقط برای جریان‌های غیرچرخشی تعریف می‌شود ولی جریان می‌تواند دوبعدی یا سه‌بعدی باشد.

تغییر شکل زاویه‌ای سیال: Angular Deformation



$$\text{Angular Def.} = \delta\alpha + \delta\beta$$

$$\lim_{\delta t \to 0}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta t} + \frac{\delta\beta}{\delta t}\right) = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \equiv$$ نرخ تغییر شکل زاویه‌ای المان سیال

$$\boxed{= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}$$

$= \gamma_{xy}$ نرخ تغییر شکل زاویه‌ای المان سیال در صفحه xy

از طرفی در مورد دوران المان سیال در صفحه xy، به دست آوردیم که:

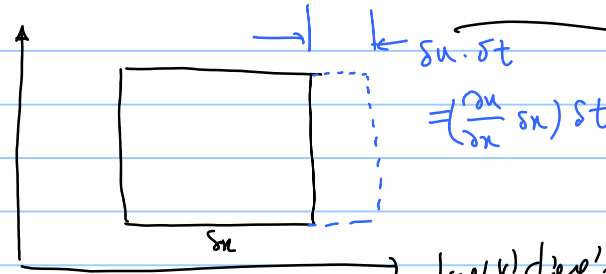
$$\boxed{\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

به همین ترتیب به دست می‌آید:

γ_{yz} نرخ تغییر شکل زاویه‌ای در صفحه yz : $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$

γ_{xz} 〃 〃 〃 : $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$

Linear Def. — تغییر شکل خطی المان سیال:



میزان تغییر شکل بر واحد طول المان سیال

$$\frac{\delta u \cdot \delta t}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\delta t$$

نرخ تغییر شکل خطی بر واحد طول المان سیال در راستای x:

$$\lim_{\delta t \to 0} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta t\right)\Big/\delta t = \frac{\partial u}{\partial x}$$

y راستای : $\dfrac{\partial v}{\partial y}$

z " : $\dfrac{\partial w}{\partial z}$

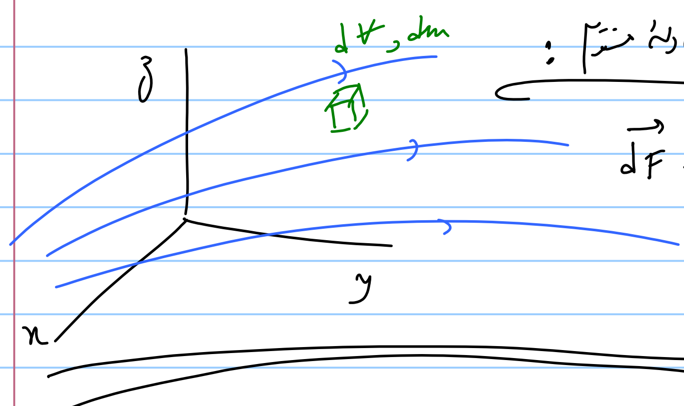
نرخ انبساط حجمی سیال $\equiv$ Volumetric Dilation Rate

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

اگر جریان تراکم ناپذیر باشد:

پیوستگی $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

فرم دیفرانسیلی معادله مومنتم:



$$d\vec{F} = dm\,\vec{a}$$