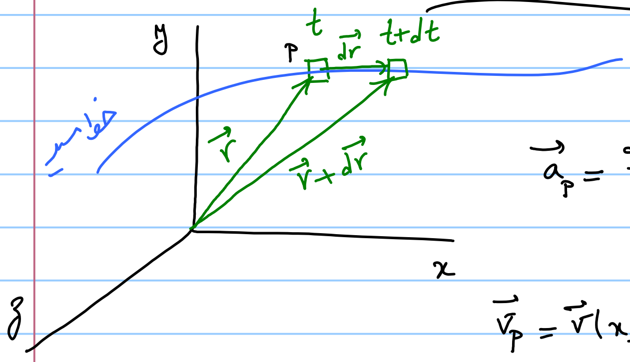
Note Title 4/19/2020

سیالات ۱ - یکشنبه ۹۹/۱/۳۱



شتاب ذره سیال :

در دیدگاه لاگرانژ

$$\vec a_p = \frac{d\vec V_p}{dt}$$

از دیدگاه اویلر

$$\vec V_p = \vec V(x,y,z,t)$$

$$d\vec V_p = \frac{\partial \vec V}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec V}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec V}{\partial z}dz + \frac{\partial \vec V}{\partial t}dt$$

$$\vec a_p = \frac{d\vec V_p}{dt} = \frac{\partial \vec V}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u} + \frac{\partial \vec V}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} + \frac{\partial \vec V}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{w} + \frac{\partial \vec V}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec a_p = \frac{d\vec V_p}{dt} = \underbrace{u\frac{\partial \vec V}{\partial x} + v\frac{\partial \vec V}{\partial y} + w\frac{\partial \vec V}{\partial z} + \frac{\partial \vec V}{\partial t}}_{\text{مشتق مادی بردار سرعت} \;=\; \frac{D\vec V_p}{Dt}}$$

$$\Rightarrow \vec a_p = \frac{D\vec V}{Dt} = \boxed{u\frac{\partial \vec V}{\partial x} + v\frac{\partial \vec V}{\partial y} + w\frac{\partial \vec V}{\partial z} + \frac{\partial \vec V}{\partial t}}$$

$$\vec\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat i + \frac{\partial}{\partial y}\hat j + \frac{\partial}{\partial z}\hat k\right)$$

$$\Rightarrow \frac{D\vec V}{Dt} = \boxed{(\vec V\cdot\vec\nabla)\vec V + \frac{\partial \vec V}{\partial t}}$$

شتاب سیال ناشی از تغییرات زمان

شتاب سیال ناشی از تغییرات مکان

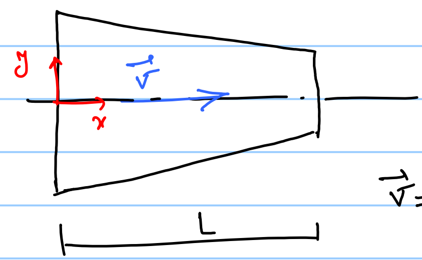
$$\begin{cases} a_x = \dfrac{Du}{Dt} = \overbrace{u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}} + \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ a_y = \dfrac{Dv}{Dt} = u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ a_z = \dfrac{Dw}{Dt} = u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases}$$

با توجه به تعریف اپراتور $\vec\nabla$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای: $\vec V = (V_r, V_\theta, V_z)$

$$a_r = \underline{V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}} + \underline{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}} - \underline{\frac{V_\theta^2}{r}} + \underline{V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}} + \frac{\partial V_r}{\partial t}$$

$$\left\{\begin{aligned} a_\theta &= v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \\ a_z &= v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{aligned}\right.$$

مثال: میدان دوبعدی دائم و تراکم ناپذیر را درون یک نازل مطابق شکل زیر در نظر بگیرید.



بردار سرعت در خط مرکزی این نازل مطابق زیر داده شده است:

$$\vec{V} = V_1 \left[1 + \frac{x}{L}\right]\hat{i}$$

شتاب ذره سیالی که خط سیر آن، خط مرکزی نازل است را از دو دیدگاه لاگرانژی و اویلری بدست آورید.

شتاب ذره از دیدگاه اویلری:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} + \cancel{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}^{\,0} \quad , \quad \vec{V} = V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)\hat{i}$$

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \left\{\left[V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)\hat{i}\right]\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right]\right\}\left[V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)\hat{i}\right]$$

$$= \left\{V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right\}\left[V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)\hat{i}\right]$$

$$= \frac{V_1^2}{L}\left(1+\frac{x}{L}\right)\hat{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{V_1^2}{L}\left(1+\frac{x}{L}\right)\hat{i}}$$

شتاب ذره سیال از دیدگاه لاگرانژی:

$$\vec{V} = \underbrace{V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)}_{u}\hat{i} \quad , \quad x = f(t)$$

$$u = \frac{dx}{dt} = V_1\left(1+\frac{x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = V_1\left(1+\frac{f}{L}\right) \Rightarrow \frac{df}{1+\frac{f}{L}} = V_1\, dt$$

$$\int_0^f \frac{df}{1+\frac{f}{L}} = \int_0^t V_1\, dt \Rightarrow L\ln\left(1+\frac{f}{L}\right) = V_1 t$$

$$\Rightarrow f(t) = x(t) = L\left[\exp\left(\frac{v_1 t}{L}\right) - 1\right]$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = v_1 \left\{1 + \left[\exp\left(\frac{v_1 t}{L}\right) - 1\right]\right\}\hat{i} \equiv$$ بردار سرعت سیال از دیدگاه لاگرانژ

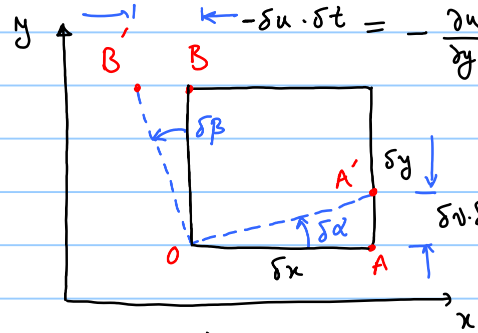
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v_1\left\{\frac{v_1}{L}\exp\left(\frac{v_1 t}{L}\right)\right\}\hat{i}$$

$$= \frac{v_1^2}{L}\exp\left(\frac{v_1 t}{L}\right)\hat{i}$$

بردار شتاب ذره سیال از دیدگاه لاگرانژ

Fluid Rotation چرخش ذره سیال :

$$-\delta u \cdot \delta t = -\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\,\delta t$$



$$\delta v \cdot \delta t = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\right)\delta t$$

$$\Rightarrow \delta\alpha = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\right)\delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t$$

$$\delta\beta = \frac{-\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\;\delta t}{\delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y}\delta t$$

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\omega_{OB} = \lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta\beta}{\delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \omega_z = \frac{1}{2}\left(\omega_{OA} + \omega_{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}$$

اگر $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow$ جریان غیر چرخشی

Irrotational Flow

" $\vec{\omega} \neq 0 \Rightarrow$ جریان چرخشی

Rotational Flow

Vorticity : تاوائی

طبق تعریف دو برابر بردار سرعت زاویه‌ای چرخش ذره سیال را تاوائی گویند.

تاوائی $\vec{\xi} = 2\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\xi} = \vec{\nabla}\times\vec{V}$

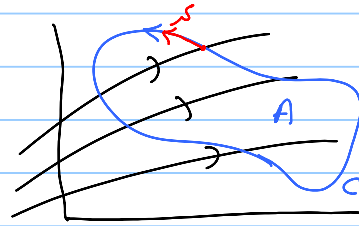
در مختصات استوانه‌ای :

$$\vec{\xi} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\hat{e}_z$$

circulation : گردش

گردش ، Γ ، طبق تعریف عبارت است از انتگرال روی هر مسیر بسته از مؤلفه سرعت مماس بر آن مسیر . یعنی :

$$\Gamma = \oint_C \vec{V}\cdot d\vec{r}$$



قضیه استوکس :

$$\underbrace{\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{r}}_{\Gamma} = \iint_A \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{V})}_{\vec{\xi}}\cdot\hat{n}\, dA$$