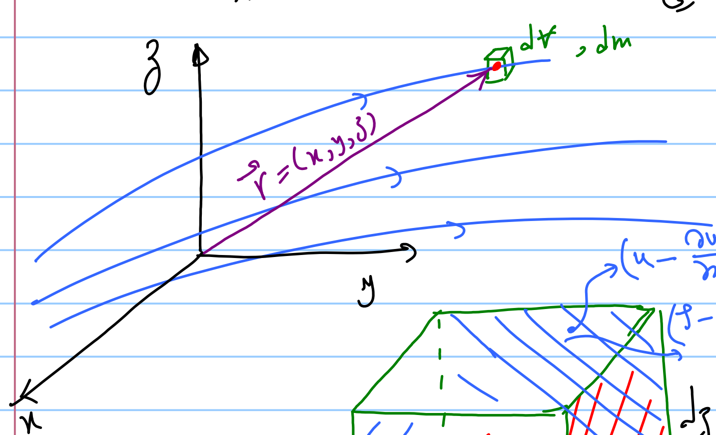
سیالات ۱ - سه‌شنبه ۹۹/۱/۲۶

فرمولاسیون حجم کنترلی (انتگرالی)

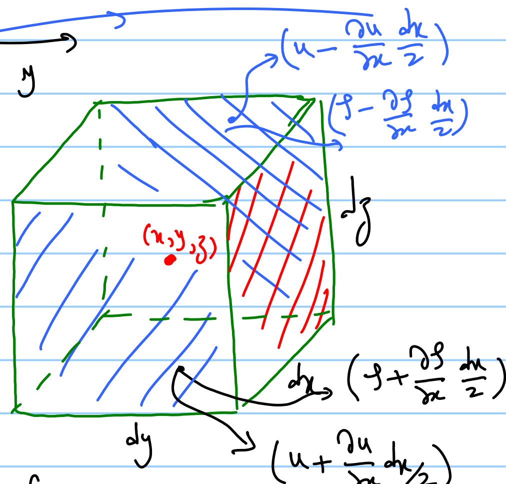
پیوستگی: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \, dV + \int_{CS} \rho \vec{V}\cdot\hat{n}\, dA = 0$

مومنتم: $\vec{F}_s + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\rho \, dV + \int_{CS} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot\hat{n}\, dA$

Differential Formulation : فرمولاسیون دیفرانسیلی



$\vec{V} = (u, v, w)$



$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \, dV}_{\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz} + \underbrace{\int_{CS} \rho \vec{V}\cdot\hat{n}\, dA}_{?} = 0$$

$$\int_{CS} \rho\vec{V}\cdot\hat{n}\, dA = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$$
$$- \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$$
$$+ \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz$$
$$- \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(v - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz$$
$$+ \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(w + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy$$
$$- \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(w - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy$$

$$\Rightarrow \int_{cv} \rho \vec{v}\cdot\hat{n}\, dA = \Big[\big(\underbrace{u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)} \big) + \big(\underbrace{v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)} \big)$$
$$+ \big(\underbrace{w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\frac{\partial w}{\partial z}}_{\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)} \big) \Big]\, dx\, dy\, dz$$

پیوستگی $\Rightarrow$
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = 0}$$

فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

برای جریان دائم : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

معادله پیوستگی برای جریان دائم

(چه جریان تراکم پذیر باشد و چه تراکم ناپذیر)

برای جریان تراکم ناپذیر : $\rho = Const.$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = \rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0}$$

معادله پیوستگی برای جریان تراکم ناپذیر

(چه جریان دائم و چه غیر دائم)

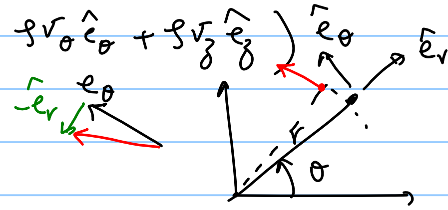
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

در مختصات استوانه ای :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z) \quad , \quad \rho\vec{v} = (\rho v_r, \rho v_\theta, \rho v_z)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z \right) \cdot$$
$$\left(\rho v_r \hat{e}_r + \rho v_\theta \hat{e}_\theta + \rho v_z \hat{e}_z \right)$$



$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$$

معادله پیوستگی در مختصات استوانه ای:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0}$$

تابع جریان : Stream Function

برای یک جریان دوبعدی تراکم ناپذیر

پیوستگی $\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

اگر تابعی مانند $\psi(x,y)$ تعریف شود که داریم

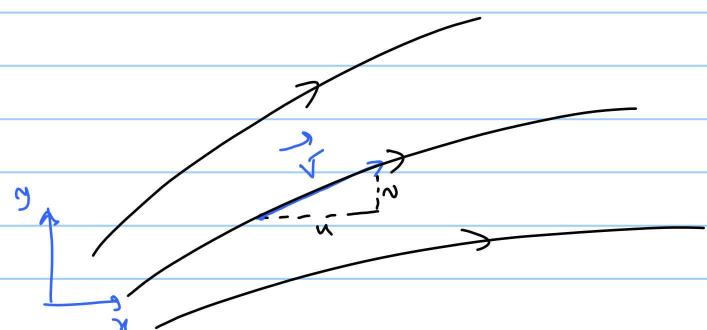
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u \quad , \quad -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v$$

پیوستگی : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \ \checkmark$$

$\psi(x,y) \equiv$ تابع جریان

Stream Function



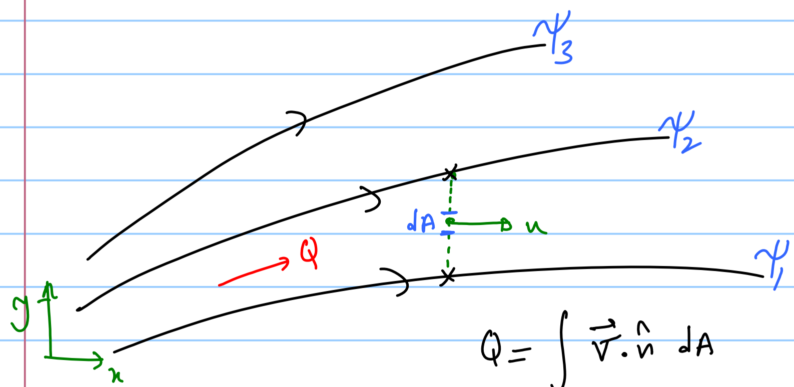
$$\left.\frac{dy}{dx}\right)_{\text{خط جریان}} = \frac{v}{u} \Rightarrow u\,dy - v\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial y}dy - \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow d\psi = 0 \longrightarrow$$ روی خط جریان

$$\Rightarrow \psi = Const$$ //



$$Q = \int_A \vec{V} \cdot \hat{n} \, dA$$

$$\Rightarrow Q = \int_{y_1}^{y_2} u \, l \, dy \Rightarrow \frac{Q}{l} = q = \int_{y_1}^{y_2} u \, dy$$

$$\Rightarrow q = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial y} dy}_{d\psi} = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \psi_2 - \psi_1}$$

مثال: مؤلفه های سرعت یک میدان جریان دوبعدی تراکم ناپذیر به شکل زیر داده شده‌اند،

$$u = x^2 \quad , \quad v = -2xy + x$$

آیا چنین میدان جریانی از نظر فیزیکی می‌تواند وجود داشته باشد؟

درصورت وجود، تابع جریان آن را بدست آورید.

بررسی: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2x + (-2x) = 0$

$$\Rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 \Rightarrow \psi(x,y) = \int x^2 dy$$

$$\Rightarrow \psi(x,y) = x^2 y + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \cancel{-2xy} + x = \cancel{-2xy} - f'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -x \Rightarrow f(x) = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x,y) = x^2 y - \frac{x^2}{2} + c} \ ?$$

اگر $\psi(0,0)=0$ اختیار کنیم

$$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow \boxed{\psi(x,y) = x^2 y - \frac{x^2}{2}}$$

سینماتیک حرکت ذره سیال: