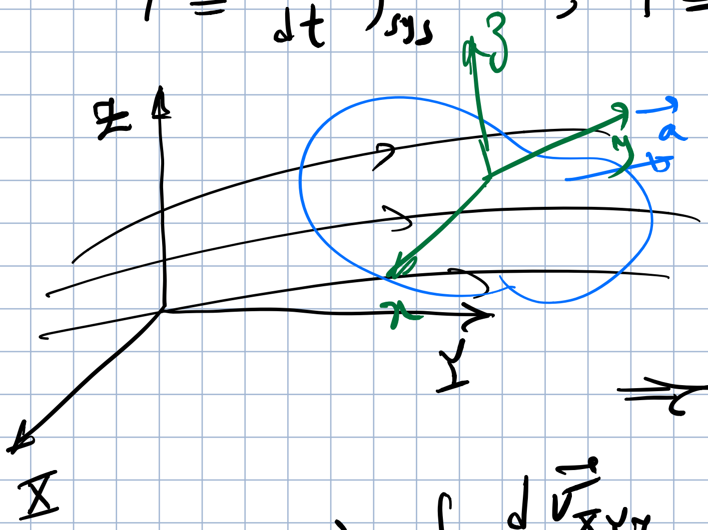
سیالات ۱ - جلسه مجازی چهارم :

معادله مومنتوم برای یک حجم کنترل شتاب‌دار :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\Big)_{sys} \quad , \quad \vec{P} = \int_{\forall_{sys}} \vec{V} \rho \, d\forall$$



$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{XYZ}}{dt}\Big)_{sys}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{m_{sys}} \vec{V}_{XYZ} \, dm$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_{m_{sys}} \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} \, dm$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_{m_{sys}} \vec{a}_{XYZ} \, dm$$

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + \vec{a}_r$$

$\vec{a}_r$ بردار شتاب دستگاه غیراینرسی (xyz) نسبت به دستگاه اینرسی (XYZ) است.

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_{m_{sys}} (\vec{a}_{xyz} + \vec{a}_r) \, dm$$

$$\Rightarrow \vec{F} - \int_{m_{sys}} \vec{a}_r \, dm = \int_{m_{sys}} \vec{a}_{xyz} \, dm = \frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\Big)_{sys}$$

$$RTT \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\Big)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V}_{xyz} \rho \, d\forall + \int_{CS} \vec{V}_{xyz} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \, dA$$

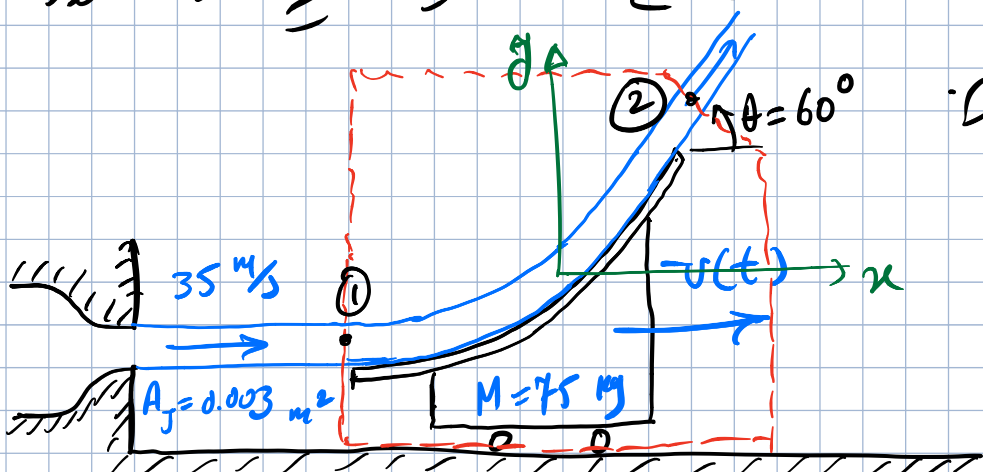
سرعت سیال نسبت به حجم کنترل شتاب دار $\equiv \vec{V}_{xyz}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cv} - \int_{m_{cv}} \vec{a}_r \, dm = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \vec{V}_{xyz}\, \rho \, d\forall + \int_{cs} \vec{V}_{xyz}\, \rho \, \vec{V}_{xyz}\cdot \hat{n}\, dA$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_s + \vec{F}_B - \int_{cv} \vec{a}_r \, \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \vec{V}_{xyz}\, \rho \, d\forall + \int_{cs} \vec{V}_{xyz}\, \rho \, \vec{V}\cdot \hat{n}\, dA}$$

مثال:

پره‌ای با زاویه چرخش $\theta = 60^\circ$ همانند شکل زیر به یک جسم متحرک متصل است. جرم مجموعه پره و متحرک $M = 75\ kg$ بوده و از اثرات اصطکاک و مقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود. یک جت آب با سرعت $\vec{V} = 35\ m/s$ به پره برخورد کرده و سطح این جت نیز $A = 0.003\ m^2$ می‌باشد. چنانچه متحرک از حالت سکون شروع به حرکت نماید، تغییرات سرعت آن را نسبت به زمان بدست آورید.



$$x\text{-mom}: \underbrace{\cancel{F_{S_x}}}_{0} + \underbrace{\cancel{F_{B_x}}}_{0} - \int_{cv} a_{r_x} \rho \, d\forall = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} u \, \rho \, d\forall}_{\neq 0\ \simeq 0} + \int_{cs} u \, \rho \, \vec{V}\cdot\hat{n}\, dA$$

$$\Rightarrow -\int_{cv} a_{r_x} \rho \, d\forall = \int_{cs} u \, \rho \, \vec{V}\cdot\hat{n}\, dA$$

$$= V_1(-\rho V_1 A_1) + V_2\cos\theta\,(\rho V_2 A_2)$$

$$-\int_{CV} a_{r_x}\rho\, dV = -a_{r_x}\underbrace{\int_{CV}\rho\, dV}_{M} = -M a_{r_x} = -M\frac{dv}{dt}$$

$$-M\frac{dv}{dt} = -\rho(V_J - v)^2 A + \rho(V-v)^2 A\cos\theta$$

$$= \rho(V-v)^2 A(\cos\theta - 1)$$

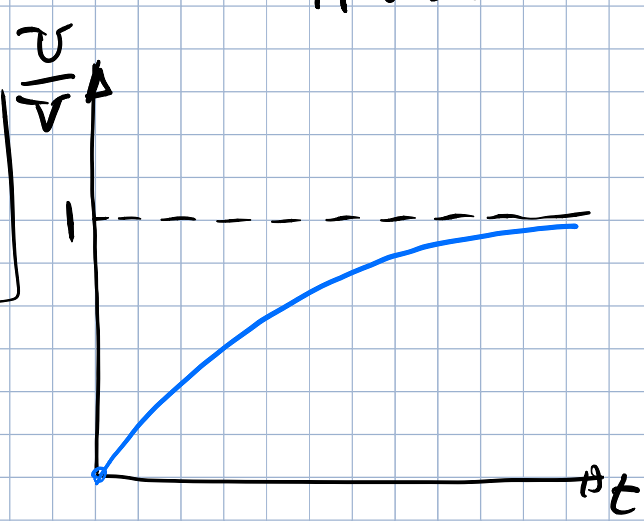
$$\Rightarrow \frac{dv}{(V-v)^2} = \frac{(1-\cos\theta)A\rho}{M}dt$$

$$\Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{(V-v)^2} = \int_0^t \frac{(1-\cos\theta)A\rho}{M}dt$$

$$\Rightarrow \left.\frac{1}{V-v}\right|_0^v = \underbrace{\frac{(1-\cos\theta)A\rho}{M}}_{b=0.7}t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V-v} - \frac{1}{V} = bt \Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{Vbt}{1+Vbt}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{0.7t}{1+0.7t}}$$



The Angular Momentum for Fixed Control volume

مومنتوم زاویه‌ای برای حجم کنترل ثابت :

$$\vec{T} = \frac{d\vec{H}}{dt}\Big)_{sys} \quad , \quad \vec{H} = \int_{\forall_{sys}} \vec{r}\times\vec{v}\,\rho\, d\forall$$

$$RTT \Rightarrow \frac{d\vec{H}}{dt}\Big)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C\forall} \vec{r}\times\vec{v}\,\rho\, d\forall + \int_{CS} \vec{r}\times\vec{v}\,\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\, dA$$

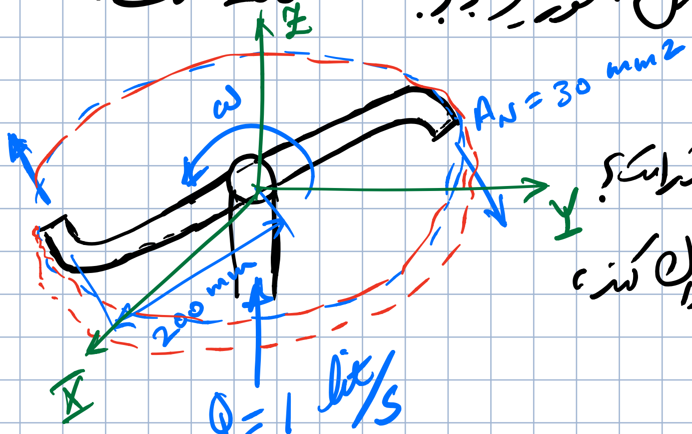
$$\vec{T} = \vec{r}\times\vec{F}_s + \int_{m_{sys}} \vec{r}\times\vec{g}\, dm + \vec{T}_{shaft}$$

$$\Rightarrow \vec{r}\times\vec{F}_s + \int_{C\forall} \vec{r}\times\vec{g}\,\rho\, d\forall + \vec{T}_{shaft} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C\forall} \vec{r}\times\vec{v}\,\rho\, d\forall + \int \vec{r}\times\vec{v}\,\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\, dA$$

معادله مومنتوم زاویه‌ای برای حجم کنترل ثابت

مثال:

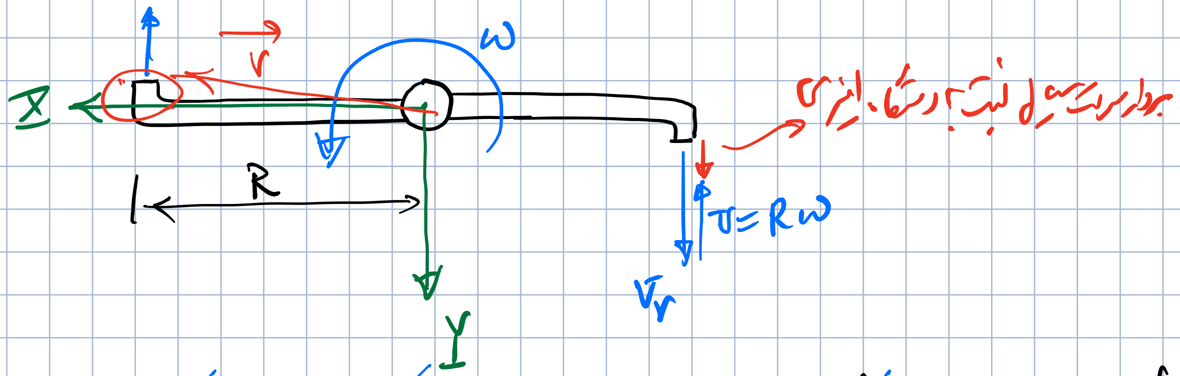
آب از محور یک فواره چرخشی با دبی ثابت یک لیتر بر ثانیه به آن وارد می‌شود و از دو نازل که سطح هر کدام $30\ mm^2$ است، خارج می‌شود. فاصله مرکز هر نازل تا محور نیز برابر با $200\ mm$ است.



الف - کوپل لازم برای جلوگیری از چرخش این فواره چقدر است؟

ب - چنانچه فواره با سرعت ثابت 500 rpm دوران کند، چه کوپلی به شفت آن وارد می‌شود؟

ج - چنانچه هیچ کوپلی به فواره وارد نشود، سرعت دوران آن چقدر خواهد بود؟



$$\cancelto{0}{\vec r\times\vec F_s} + \cancelto{0}{\int \vec r\times\vec g\,\rho\, d\forall} + \underline{\vec T_{shaft}} = \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\vec r\times\vec V\rho\, d\forall} + \int_{CS}\vec r\times\vec V\rho\vec V\cdot\hat n\, dA$$

$$\Rightarrow \vec T_{shaft} = \int_{CS}\vec r\times\vec V\rho\vec V\cdot\hat n\, dA$$

برای نازل سمت چپ! $\vec r\times\vec v = (R\hat i)\times(-v\hat j) = -Rv\hat k$

// // راست $\vec r\times\vec v = (-R\hat i)\times(v\hat j) = -Rv\hat k$

$$\Rightarrow \vec T_{shaft} = (-Rv\hat k)\underbrace{\int_{CS}\rho\vec V\cdot\hat n\, dA}_{\dot m = \rho Q}$$

$$\Rightarrow \vec T_{shaft} = -Rv\rho Q\hat k \quad , \quad v = \cancelto{\frac{Q/2}{A_N}}{V_r} - R\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec T_{shaft} = -\rho R Q\left(\frac{Q}{2A_N} - R\omega\right)\hat k} \quad (*)$$

الف - گشتاور لازم به نگهداشتن فواره :

$$\omega = 0 \Rightarrow \vec T_{shaft} = -\rho R\frac{Q^2}{2A_N}\hat k = \underline{-3.34\,\hat k \ \ N.m}$$

ب - گشتاور لازم جهت اینکه فواره با سرعت $\omega = 500\ rpm$ دوران کند:

$$(*) \Rightarrow \vec{T}_{shaft} = -1.24\ \hat{k}\ \ N.m$$

ج - سرعت زاویه‌ای دوران فواره در حالت آزاد.

$$\vec{T}_{shaft} = 0 \Rightarrow (*) \Rightarrow \omega = \frac{Q}{2RA_N} = 83.5\ rad/s$$

$$= 797\ rpm$$