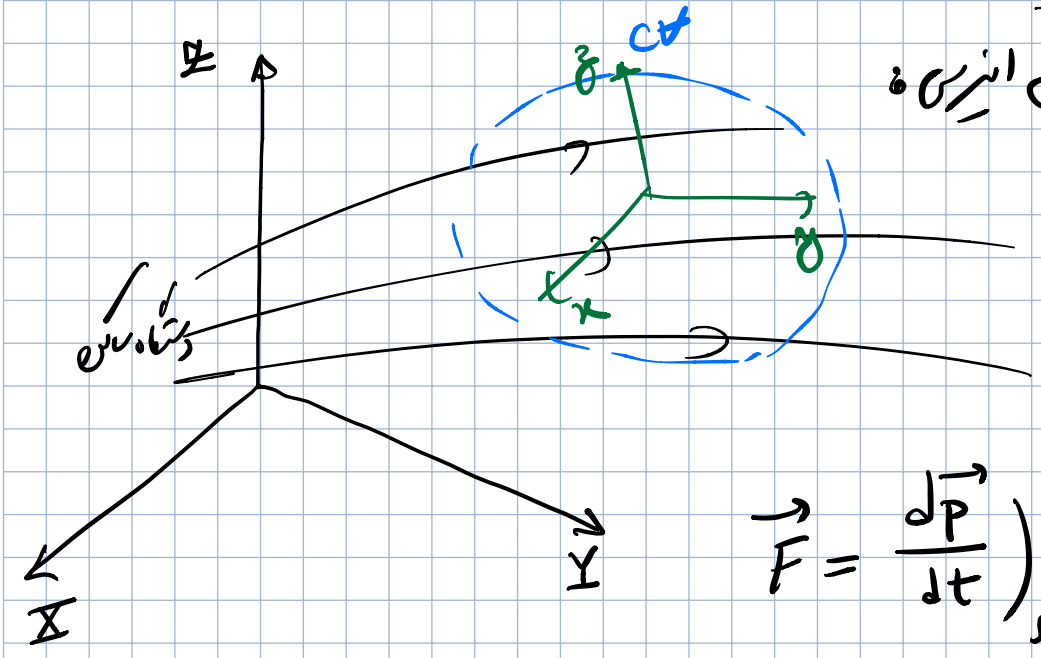
معادلات ۱- مبنای بازرس سوم :

معادله مومنتوم برای حجم کنترل اینرسی :



قانون دوم نیوتن 2

$$\vec{F} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sys} \quad , \quad \vec{P} = \int_{M_{sys}} \vec{v}\, dM$$

طبق فرضیه اصل پیوستگی :

$$N = \vec{P} \quad , \quad \frac{N}{M} = \eta = \vec{v}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{v}\,\rho\, dV + \int_{CS} \vec{v}\,\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\, dA$$

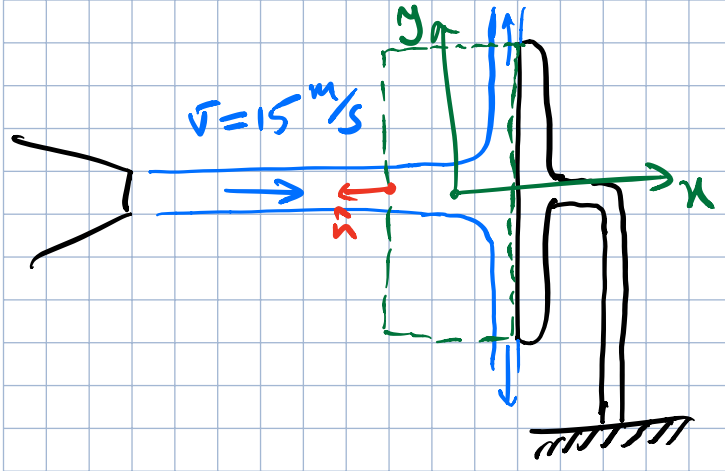
$$\vec{F}_{sys} = \vec{F}_{CV} \Rightarrow \vec{F}_{CV} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{v}\,\rho\, dV + \int_{CS} \vec{v}\,\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\, dA$$

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B$$

$$\Rightarrow \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{v}\,\rho\, dV + \int_{CS} \vec{v}\,\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\, dA$$

معادله مومنتوم برای حجم کنترل اینرسی

مثال: یک جت آب با سرعت $15\ m/s$ از دهانه یک نازل به مساحت $0.01\ m^2$ خارج و به سطح یک صفحه مطابق شکل برخورد می‌کند. نیروهای وارده برای صفحه ثابت را بر حسب جت آب بدست آورید.



فرضیات:
- جریان دائم
- تراکم‌ناپذیر
- غیرلزج

x-mom: $F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} u\,\rho\,dV + \int_{CS} u\,\rho\,\vec{V}.\hat{n}\,dA$

($F_{B_x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} = 0$)

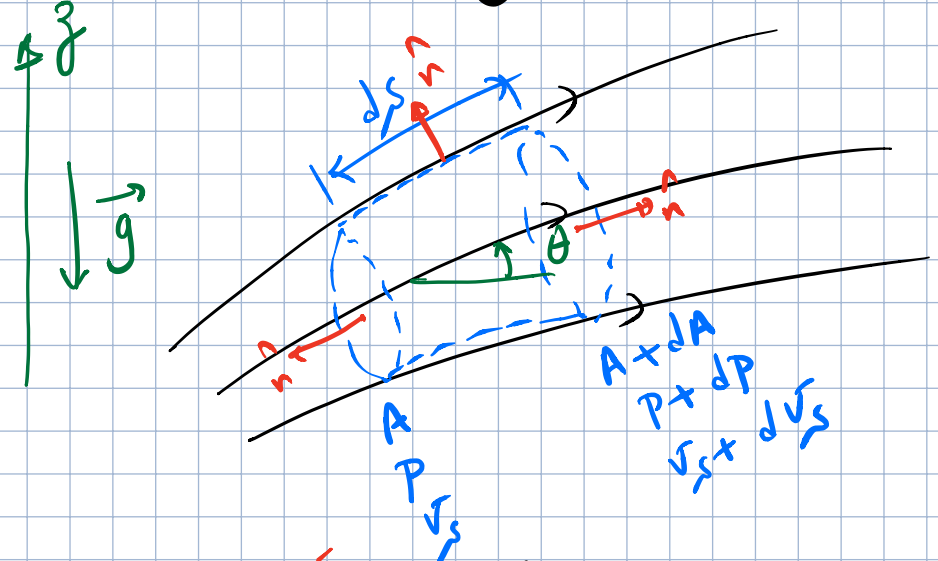
$$\Rightarrow F_{S_x} = \int_{CS} u\,\rho\,\vec{V}.\hat{n}\,dA = \int_{A_J} u\,\rho\,\vec{V}.\hat{n}\,dA$$

($\vec{V}.\hat{n} = -u$)

$$\Rightarrow F_{S_x} = -\rho u^2 A_J = -2.25\ kN$$

$$\Rightarrow R_x = +2.25\ kN$$

Flow along a streamline : جریان در امتداد خط جریان



الف- معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho\,dV + \oint_{CS} \rho\,\vec{V}.\hat{n}\,dA = 0$$

($\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} = 0$ دائم)

$$\Rightarrow \int_{CS} \rho \vec{v}\cdot\hat{n}\, dA = 0 \Rightarrow -\rho v_s A + \rho (v_s + dv_s)(A+dA) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{v_s\, dA + A\, dv_s = 0}$$

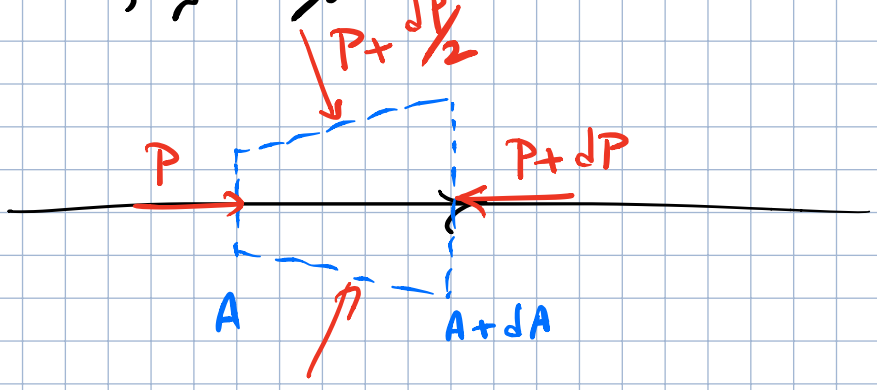
: معادلة الزخم -ب

$$F_{s_s} + F_{B_s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} v_s\, \rho\, dV + \int_{CS} v_s\, \rho \vec{v}\cdot\hat{n}\, dA$$

$$I$$

$$\Rightarrow I = v_s\,(-\rho v_s A) + (v_s + dv_s)\underbrace{\left[\rho (v_s+dv_s)(A+dA)\right]}_{\rho v_s A}$$

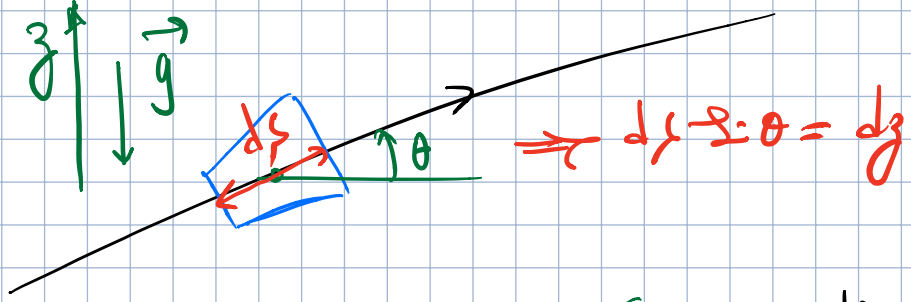
$$= \rho v_s A\, dv_s$$



$$\Rightarrow F_{s_s} = PA - (P+dP)(A+dA) + (P+\tfrac{dP}{2})\,dA$$

$$= -A\,dP$$

$F_{B_s} = ?$



$$\Rightarrow ds\cdot\sin\theta = dz$$

$$\Rightarrow F_{B_s} = (\rho\, dV)\, g_s = \rho\,(-g\sin\theta)\,(A+\tfrac{dA}{2})\,ds$$

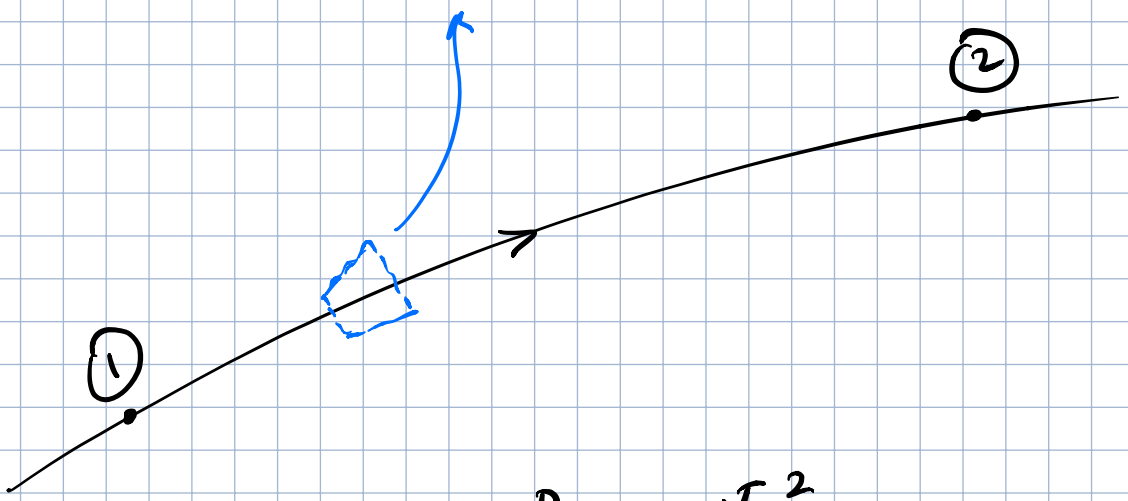
dz

$$\Rightarrow F_{B_x} = -\rho g \left(A + \frac{dA}{2}\right) dz = -\rho g A\, dz$$

$$\Rightarrow -A\,dp - \rho g A\, dz = \rho V_1 A\, dV_1$$

$$d\left(\frac{V_1^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{\rho} + g\,dz + d\left(\frac{V_1^2}{2}\right) = 0$$



$$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{Const}$$

این معادله برنولی

معادله برنولی

- ✓ جریان دائمی
- ✓ " تراکم‌ناپذیر
- ✓ " غیرلزج
- ✓ در امتداد خطوط جریان

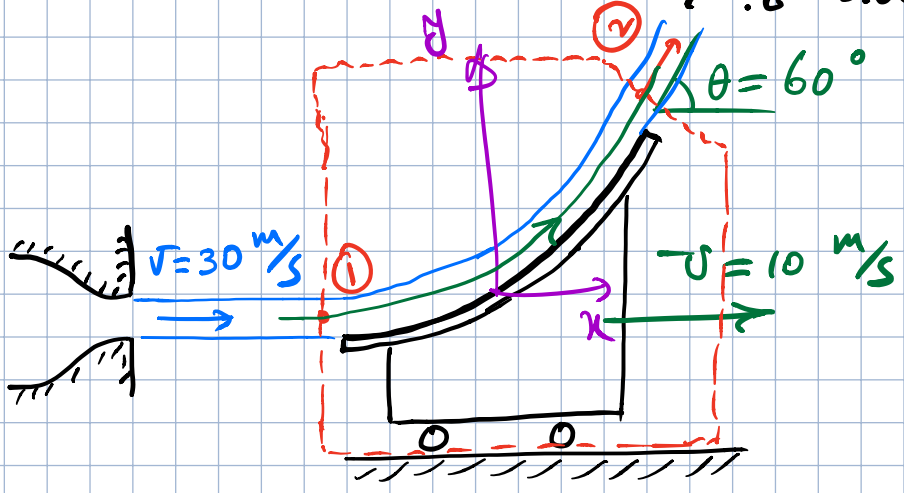
اعمال معادله منتج به جریان با سرعت ثابت:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{V}\,\rho\,dV + \int_{CS} \vec{V}\,\rho\,\vec{V}\cdot\hat{n}\,dA$$

بیلانس سیال بین ورودی و خروجی کنترل

مثال:

پره‌ای مطابق شکل زیر در معرض جریان آب ← قرار دارد. فرض کنید سرعت آب ورودی از یک نازل با سرعت $V = 30\ m/s$ قرار دارد. همچنین سرعت آب خروجی از پره برابر با $U = 10\ m/s$ باشد، نیروی اعمالی بر این مجموعه چقدر است؟ سطح خروجی نازل برابر با $0.003\ m^2$ می‌باشد.



$$\Rightarrow F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} u\,\rho\,dV + \int_{CS} u\,\rho\,\vec{V}\cdot\hat{n}\,dA$$

(صفر) (صفر)

$$\Rightarrow F_{S_x} = V_1(-\rho V_1 A_1) + (V_2\cos\theta)(\rho V_2 A_2)$$

برای پره: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\,dV + \int_{CS}\rho\,\vec{V}\cdot\hat{n}\,dA = 0 \Rightarrow \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$ (صفر)

$$\Rightarrow F_{S_x} = \rho V_1 A_1 (V_2\cos\theta - V_1)$$

Bern. $\Rightarrow \cancel{\frac{P_1}{\rho}} + \frac{V_1^2}{2} + \cancel{g z_1} = \cancel{\frac{P_2}{\rho}} + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{g z_2} \Rightarrow V_1 = V_2$

$\Rightarrow F_{fx} = \underbrace{\rho}_{1000} V_1^2 \underbrace{A_1}_{0.003} (\cos\theta - 1)$, $V_1 = \underbrace{V}_{30} - \underbrace{U}_{10}$

$\Rightarrow \underline{F_{fx} = -600 \text{ N}}$

y-mom : $\Rightarrow F_{fy} + F_{By} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} v \rho \, dV + \int_{CS} v \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \, dA$

$\Rightarrow \underline{F_{fy} = 600\sqrt{3} \text{ N}}$