سیالات ۱ - جلسه مجازی دوم:

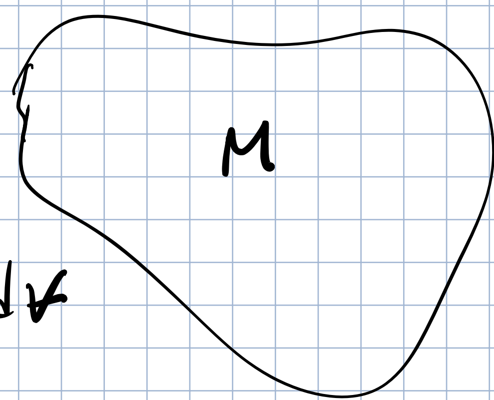
فرمولاسیون حجم کنترل جریان سیال:

قوانین اساسی برای سیستم:

- ✓ قانون بقای جرم
- ✓ " " اندازه حرکت
- ✓ اصل اندازه حرکت زاویه‌ای
- ✓ قانون اول ترمودینامیک
- ✓ " دوم "

Conservation of Mass : قانون بقای جرم

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{sys} = 0$$



$$M_{sys} = \int_{sys} dm = \int_{V_{sys}} \rho \, dV$$

قانون بقای اندازه حرکت خطی (قانون دوم نیوتون)

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sys} \quad , \quad \vec{P} = \int_{m_{sys}} \vec{V} \, dm = \int_{V_{sys}} \vec{V} \rho \, dV$$

The Angular Momentum Principle : اصل اندازه حرکت زاویه ای

$$\vec{T} = \frac{d\vec{H}}{dt}\Big)_{sys} \quad , \quad \vec{H} = \int_{m_{sys}} \vec{r}\times\vec{V}\, dm$$

$$= \int_{\forall_{sys}} \vec{r}\times\vec{V}\,\rho\, d\forall$$

The First Law of Thermodynamics: قانون اول ترمودینامیک

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt}\Big)_{sys}$$

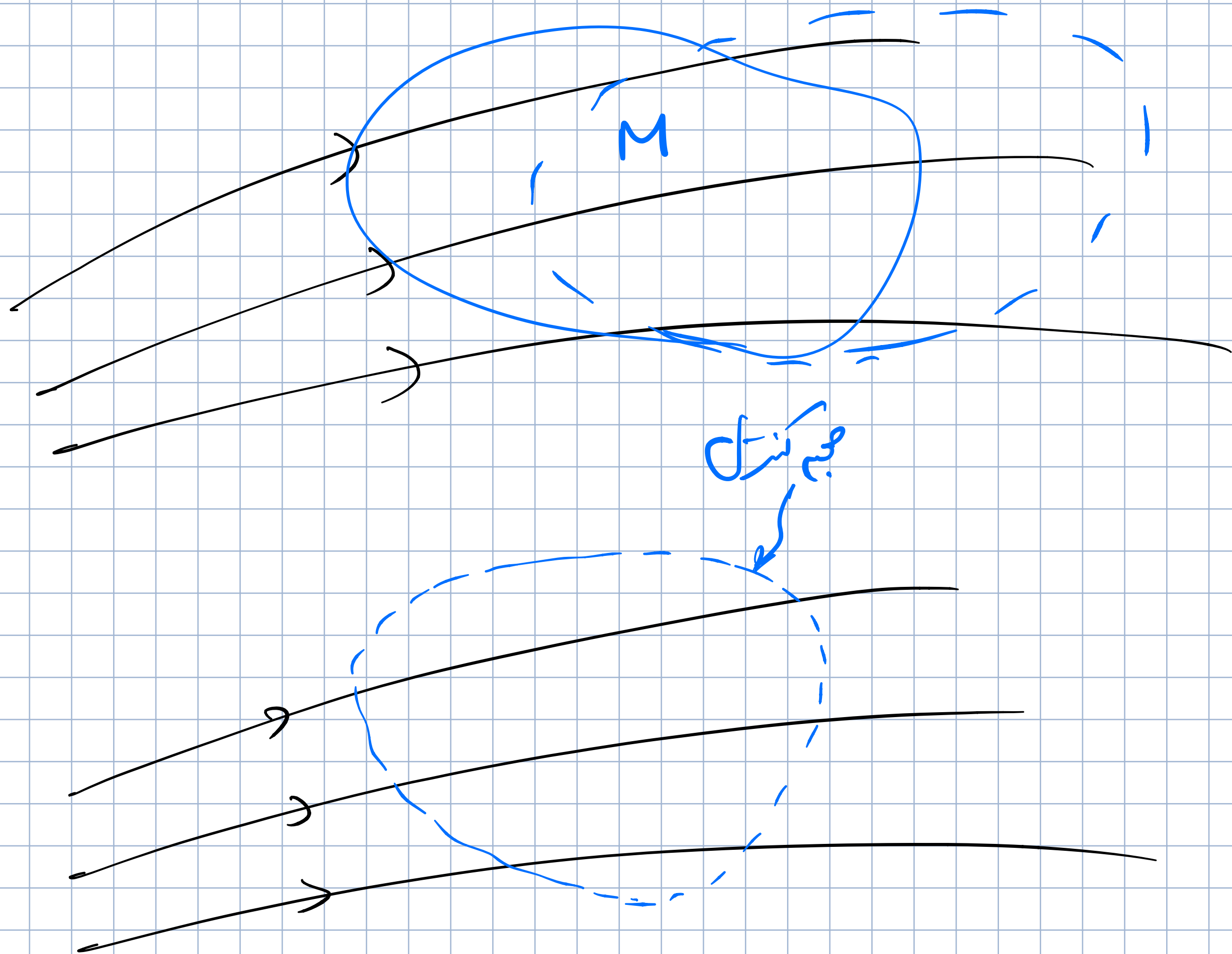
$$E = \int_{m_{sys}} e\, dm = \int_{\forall_{sys}} e\,\rho\, d\forall$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

The 2nd Law of Thermodynamics : قانون دوم ترمودینامیک

$$\frac{dS}{dt}\Big)_{sys} \geq \frac{\dot{Q}}{T}$$

$$S = \int_{S_{sys}} s\, dm = \int_{\forall_{sys}} s\,\rho\, d\forall$$

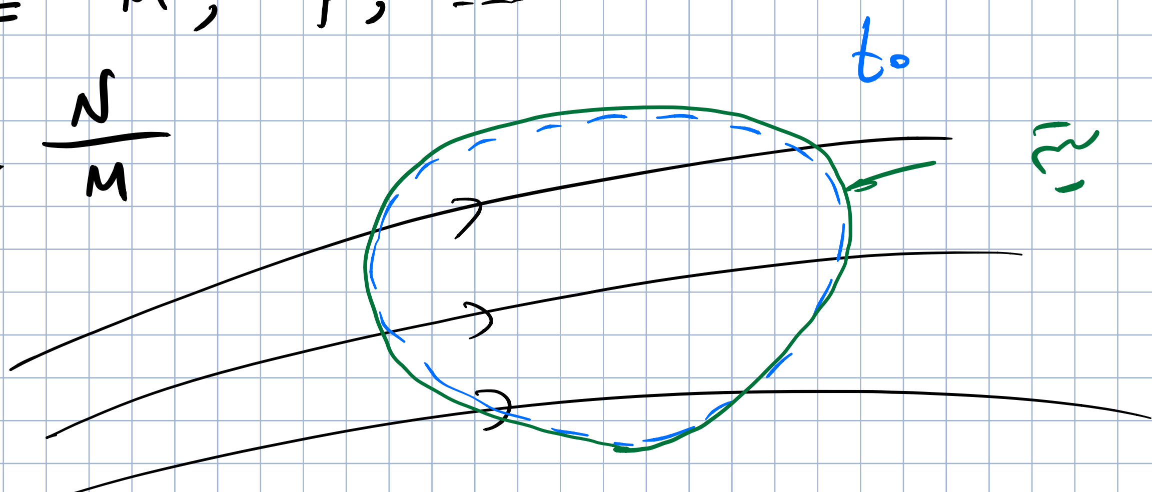


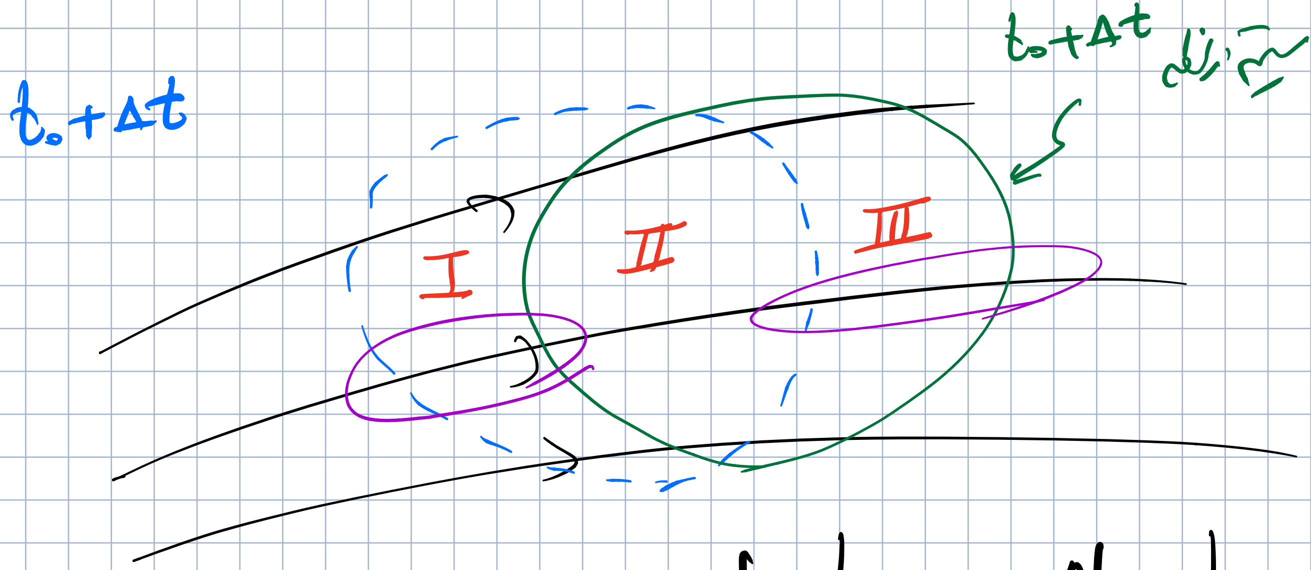
Reynolds Trasport Theorem (RTT) : تئوری انتقال رینولدز

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{sys} , \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sys} , \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{sys} , \left.\frac{dE}{dt}\right)_{sys} , \left.\frac{dS}{dt}\right)_{sys}$$

$$N \equiv M , \vec{P} , ---$$

$$\eta = \frac{N}{M}$$





$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{sys}\big|_{t_0+\Delta t} - N_{sys}\big|_{t_0}}{\Delta t}$$

$$N_s\big|_{t_0+\Delta t} = \left(N_{II} + N_{III}\right)_{t_0+\Delta t}$$

$$= \left(N_{cv} - N_{I} + N_{III}\right)_{t_0+\Delta t}$$

$$N_s\big|_{t_0} = N_{cv}\big)_{t_0}$$

$$N_s\big)_{t_0+\Delta t} = \underbrace{\left[\int_{cv} \eta \rho \, dV\right]_{t_0+\Delta t}}_{N_{cv}} - \underbrace{\left[\int_{I} \eta \rho \, dV\right]_{t_0+\Delta t}}_{N_{I}}$$

$$+ \underbrace{\left[\int_{III} \eta \rho \, dV\right]_{t_0+\Delta t}}_{N_{III}}$$

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\left[\int_{C\forall} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t} - \left[\int_{C\forall} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0}}{\Delta t}}_{1}$$

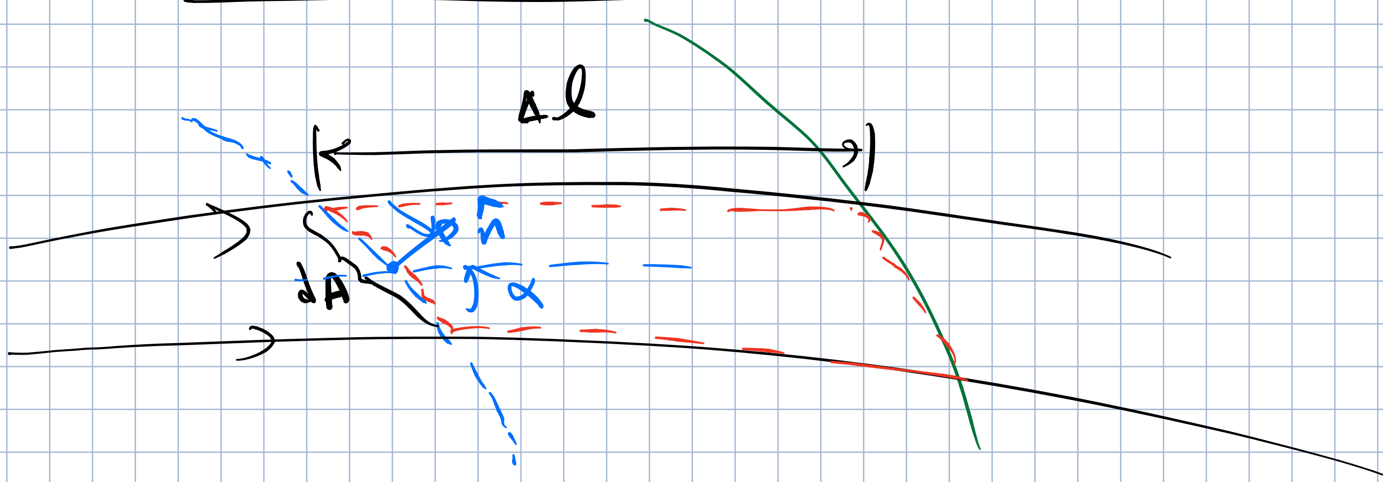
$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\left[\int_{III} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{2}$$

$$- \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\left[\int_{I} \eta \rho \, d\forall\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{3}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = 1 + 2 - 3$$

$$1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{C\forall}\big|_{t_0+\Delta t} - N_{C\forall}\big)_{t_0}}{\Delta t} = \frac{\partial N_{C\forall}}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{C\forall} \eta \rho \, d\forall$$



$$d\forall = \Delta l \cdot dA \cdot \cos\alpha$$

$$② = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left. \int_{III} \eta \rho \, d\forall \right|_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{CS_{III}} \eta \rho \, \Delta l \cos\alpha \, dA}{\Delta t}$$

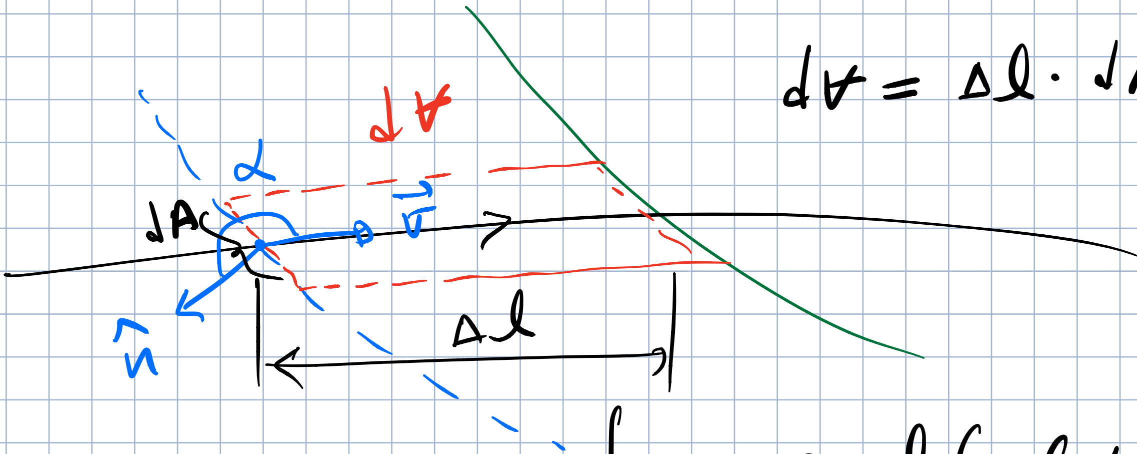
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \int_{CS_{III}} \eta \rho \frac{\Delta l}{\Delta t} \cos\alpha \, dA$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = |\vec{v}|$$

$$② = \int_{CS_{III}} \eta \rho \underbrace{|\vec{v}| \cos\alpha}_{\vec{v} \cdot \hat{n}} \, dA$$

$$\Rightarrow ② = \int_{CS_{III}} \eta \rho \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

$$dV = \Delta l \cdot dA(-\cos\alpha)$$



$$\Rightarrow \; 3 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{CS_I} \eta \rho \, \Delta l (-\cos\alpha) \, dA}{\Delta t}$$

$$= -\lim \int_{CS_I} \eta \rho \, \frac{\Delta l}{\Delta t} \cos\alpha \, dA$$

$$= -\int_{CS_I} \eta \rho \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho \, dV + \int_{CS_{III}} \eta \rho \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

$$- \left(- \int_{CS_I} \eta \rho \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA \right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho \, dV + \int_{CS} \eta \rho \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

قضیه انتقال رینولدز

کاربرد قانون بقای جرم بر حجم کنترل :

$$N = M \quad , \quad \eta = 1$$

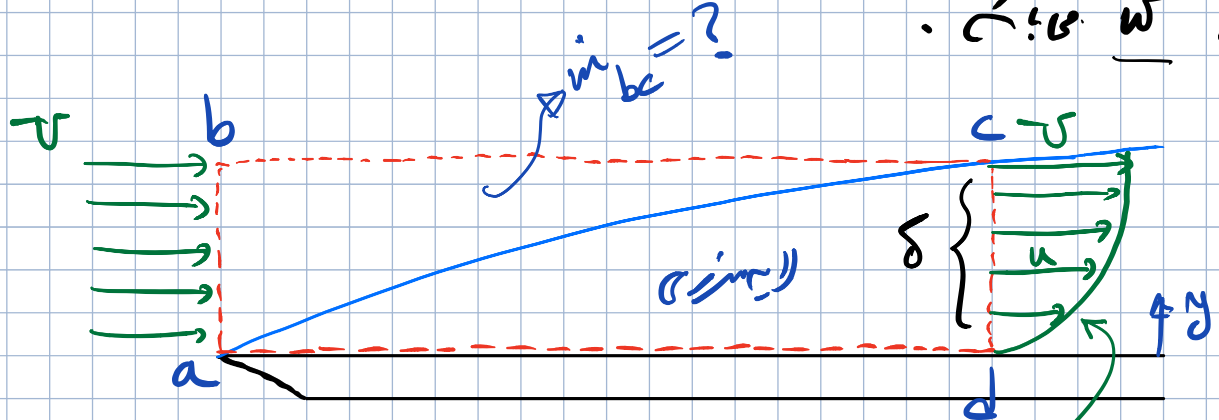
$$\Rightarrow \cancel{\left.\frac{dM}{dt}\right)_{sys}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \, d\forall + \int_{CS} \rho \, \vec{V}\cdot\hat{n} \, dA$$

0

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \, d\forall + \int_{CS} \rho \, \vec{V}\cdot\hat{n} \, dA = 0}$$

معادله پیوستگی

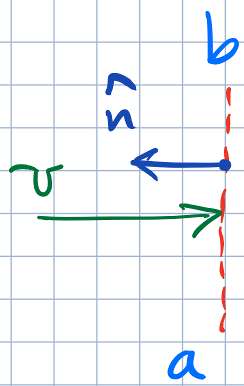
مثال : ماهیت جریان برای یک لایه مرزی تشکیل شده بر روی یک صفحه تخت مطابق شکل زیر داده شده است. با فرض اینکه جریان دائم و تراکم ناپذیر باشد، دبی جرمی عبوری از مقطع bc را بدست آورید. عرض صفحه برابر با w می‌باشد.



$$\rightarrow \frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\cancelto{0}{\int_{C\forall}\rho\, d\forall} + \underline{\int_{CS}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA} = 0$$

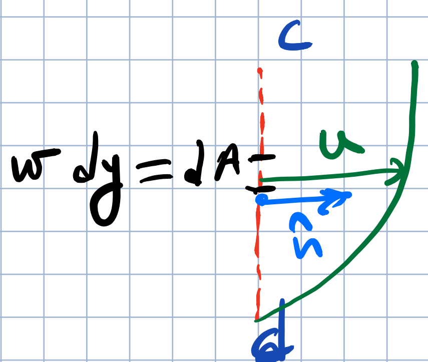
$$\Rightarrow \underbrace{\int_{A_{ab}}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA}_{\dot{m}_{ab}} + \underbrace{\underbrace{\int_{A_{bc}}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA}_{\dot{m}_{bc}}}_{?} + \underbrace{\int_{A_{cd}}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA}_{\dot{m}_{cd}} + \underbrace{\cancelto{0}{\int_{A_{ad}}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA}}_{\dot{m}_{ad}} = 0$$



$$\dot{m}_{ab} = \int_{A_{ab}}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA$$

$$= \rho\int_{A_{ab}} -v\,dA = -\rho v A_{ab}$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{m}_{ab} = -\rho v w \delta}$$



$$\Rightarrow \dot{m}_{cd} = \int_{A_{cd}}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA$$

$$= \rho\int_{A_{cd}} u\,dA = \rho w\int_0^{\delta} u\,dy$$

$$\Rightarrow \dot{m}_{cd} = \rho w\int_0^{\delta} v\left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]dy$$

$$= \frac{2\rho v w \delta}{3}$$

$$\dot{m}_{bc} = -\dot{m}_{ab} - \dot{m}_{cd} = \frac{\rho v w \delta}{3}$$