تمرینات برداری

سوال ۱-

بردار یکه‌ای را تعیین کنید که بر صفحه ای شامل بردارهای $\vec{A}=(2,-6,-3)$ و $\vec{B}=(4,3,-1)$ عمود باشد.

سوال ۲-

دو میدان برداری $\vec{A}=A_x\ \hat{a}_x+A_y\ \hat{a}_y+A_z\ \hat{a}_z$ و $\vec{B}=B_x\ \hat{a}_x+B_y\ \hat{a}_y+B_z\ \hat{a}_z$ داده شده‌اند. برای اینکه دو میدان در تمام نقاط فضا با یکدیگر موازی باشند، چه رابطه‌ای باید بین مولفه‌های این دو بردار برقرار باشد؟

سوال ۳-

معادله صفحه‌ای را معین کنید که از نقاط $P_1=(2,-1,1)$ و $P_2=(3,2,-1)$ و $P_1=(-1,3,2)$ بگذرد.

سوال ۴-

بردارهای مکانی دو نقطه P_1 و P_2 به ترتیب برابرند با $\vec{A}=3\ \hat{a}_x+\hat{a}_y+2\ \hat{a}_z$ و $\vec{B}=\hat{a}_x-2\ \hat{a}_y-4\ \hat{a}_z$. معادله صفحه‌ای را معین کنید که از نقطه P_2 عبور کند و بر خط واصل دو نقطه عمود باشد.

سوال ۵-

سطحی را که توسط معادله $2xz^2-3xy-4x-7=0$ مشخص شده است،در نظر بگیرید. بردار یکه‌ای بیابید که در نقطه $P=(1,-1,2)$ بر این سطح عمود باشد.

سوال ۶-

با فرض اینکه r مولفه اول مختصات کروی باشد، نشان دهید که $\nabla r^n=nr^{n-2}\vec{r}$ و سپس $\nabla(\frac{1}{r})$ را بدست آورید.

سوال ۷-

تابع میدان اسکالر $\Phi = x^2 yz^3$ را درنظر بگیرید. در کدام جهت از نقطه $P = (2,1,-1)$ مشتق سویی تابع Φ بیشینه است؟ بزرگی این بیشینه را بدست آورید.

سوال ۸-

نشان دهید اگر $r \neq 0$ باشد، آنگاه $\nabla.(\frac{\vec{R}}{R^3}) = 0$ است.

سوال ۹-

اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ پایستار باشند، ثابت کنید $\vec{A} \times \vec{B}$ سیملوله‌ای است.

سوال ۱۰-

(الف) اگر میدان برداری $\vec{A} = (x + 2y + az)\hat{x} + (bx - 3y - z)\hat{y} + (4x + cy + 2z)\hat{z}$ غیر چرخشی یا پایستار باشد، مقادیر a، b و c را تعیین کنید.

(ب) به شرط آن که $\vec{A} = \nabla\Phi$ باشد، تابع میدان اسکالر $\Phi(x, y, z)$ را بیابید.

سوال ۱۱-

اگر بردار $\vec{A} = (x + 3y)\hat{x} + (y - 2z)\hat{y} + (x + az)\hat{z}$ سیملوله‌ای (دارای واگرایی صفر) باشد، مقدار ثابت a را بدست آورید؟

سوال ۱۲-

(الف) نشان دهید میدان برداری $\vec{E} = \frac{\hat{R}}{R^2}$ پایستار است. (ب) میدان اسکار $\Phi(R, \theta, \varphi)$ را طوری بیابید که $\vec{E} = -\nabla\Phi$ و $\Phi(a) = 0$ باشد.

سوال ۱۳-

نشان دهید که میدان برداری $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{x} + (3x^2 - z)\hat{y} + (3xz^2 - y)\hat{z}$ پایستار است و تابع پتانسیل $\Phi(x, y, z)$ متناظر آن را بدست آورید. (باید $\vec{A} = \nabla\Phi(x, y, z)$ باشد.)

سوال ۱۴-

$\nabla.\vec{r}$ و انتگرال سطحی را تعیین کنید. که در آن $\vec{r}$ بردار مکانی در مختصات کروی و S یک سطح بسته کروی به مرکز مبدا مختصات باشد.

سوال ۱۵-

بردار $\vec{A} = z\ \hat{x} + x\ \hat{y} - 3y^2 z\ \hat{z}$ و سطح استوانه $x^2 + y^2 = 16$ را در نظر بگیرید.

(الف) بردار یکه عمود بر سطح مورد نظر را به صورت یک تابع از x و y تعیین کنید.

(ب) با کمک قضیه دیورژانس، انتگرال سطحی $\oint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds}$ را روی یک هشتم اول سطح استوانه بین وصفحات $z=0$ و $z=5$ محاسبه کنید.