فصل اول

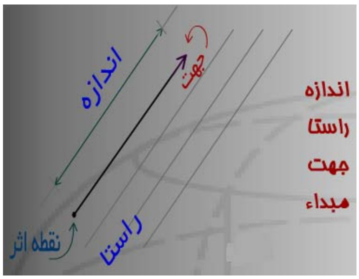
رياضيات برداري

بردارها و اسكالرها

اصولاً كميت‌هاي فيزيكي از نظر معرفي و معين شدن در دو دسته قرار مي‌گيرند: اسكالر و بردار

اسكالر Scalar: به كميت‌هائي اتلاق مي‌شوند كه تنها توسط يك عدد كه همان اندازه آن كميت باشد مشخص مي‌شوند مانند جرم، انرژي و بار الكتريكي

بردار vector: كميت‌هايي هستند كه براي مشخص شدن آنان علاوه بر اندازه، به جهت نيز نيازمند هستند مانند نيرو، شدت ميدان الكتريكي و چگالي جريان حجمي الكتريكي منظور از جهت در اين كلام، معلوم بودن راستا يا محمل بردار، جهت و سمت بردار بر روي اين راستا مي‌باشد. مانند شكل روبرو.



شكل۱

عموماً بمنظور تفكيك نمودن كميت‌هاي اسكالر و برداري از يكديگر بصورت پارامتري و نمادي بطريق زير عمل مي‌شود: كميتهاي اسكالر با حروف كوچك و كميتهاي برداري با حروف بزرگ توأم با علائمي در بالاي آنها مانند:

اسكالر $a, b, c, m, n,...$

بردار $\vec{A}, \vec{B}, \overline{C}, \overline{\overline{D}}, \hat{F}, A, B\ , E$

براي نمايش اندازه يك بردار يا حرف مربوطه را بدون علائم بردار بكار مي‌رود و يا از علامت قدر مطلق مانند:

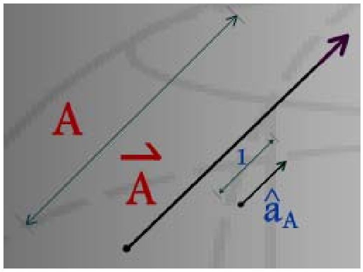
$\vec{F}$ اندازه بردار $= F = \left|\vec{F}\right|$

بردار يكان: unit vector

بردار واحد يا بردار يكان يك بردار عبارتست از برداري با اندازه واحد و همجهت با بردار مربوطه براي نمايش اين بردار عموماً از حروف a، u همراه با علامت ^ بر روي آن استفاده مي‌شود. همچنين براي مشخص‌تر شدن آن از يك انديس مشابه با اسم بردار اصلي بهمراه حروف u و a نيز استفاده بعمل مي‌آيد

$\vec{A}$ بردار واحد بردار $= \hat{u}_A = \hat{a}_A$

بنابراين $\hat{a}_A = \dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$



شکل۲

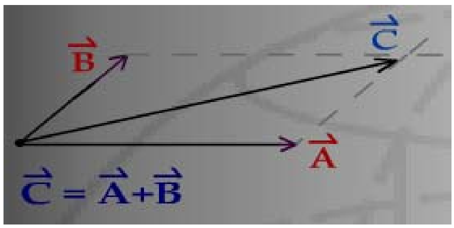
جبر بردارها vector Algebra

چهار عمل اصلي در رياضيات برداري بصورت زير تعريف مي‌شوند:

- جمع بردارها:

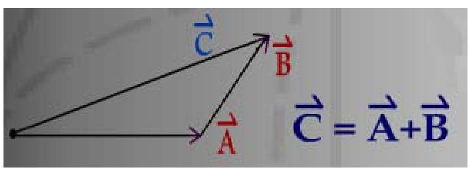
از نظر گرافيكي (هندسي) جمع چند بردار به دو روش انجام مي‌گيرد:

روش اول تشكيل متوازي‌الاضلاع است.

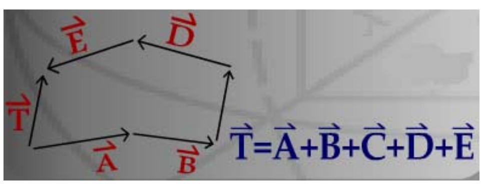


شکل ۳

روش دوم روش چند ضلعي يا روش سربه‌دم است.



شکل ٤



شکل ٥

از نظر تحليلي جمع دو بردار پس از تجزيه آندو به مؤلفه‌هاي هم جهت، مي‌توان با جمع جبري مؤلفه‌هاي هم جهت دو بردار عمل جمع را انجام داد.

$$\vec{A}+\vec{B}=?$$

$$\vec{A}=A_1\hat{a}_1+A_2\hat{a}_2+A_3\hat{a}_3$$

$$\vec{B}=B_1\hat{a}_1+B_2\hat{a}_2+B_3\hat{a}_3$$

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_1+B_1)\hat{a}_1+\left(A_2+B_2\right)\hat{a}_2+(A_3+B_3)\hat{a}_3$$

در جمع بردارها خاصيت جابجائي و شركت‌پذيري صادق هستند.

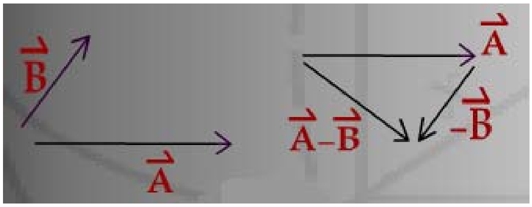
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

- **تفريق بردارها**

در اين عمل بردار $\vec{A}$ را با معكوس شده بردار $\vec{B}$ جمع مي‌شود

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$



شكل ٦

ضرب بردارها

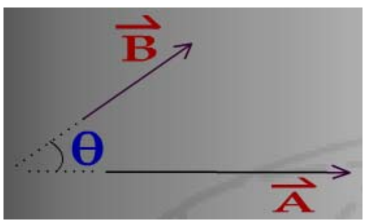
الف- ضرب دو بردار:

١ – ضرب داخلي دو بردار

نتيجه ضرب داخلي دو بردار يك اسكالر مي‌باشد، مانند:

[θ كوچكترين زاويه بين دو بردار است] $\quad C=\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta$

بهمين دليل اين نوع ضرب را ضرب اسكالر نيز گفته مي‌شود. همچنين چون در نمايش اين ضرب از علامت نقطه بعنوان عمليات ضرب استفاده مي‌شود، به آن ضرب نقطه‌اي نيز گفته شده است. Scalar product , Dot product



شكل ٧

از خواص اين نوع ضرب جابجايي و توزيع‌پذيري است.

$$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$$

$$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}.\vec{B})+(\vec{A}.\vec{C})$$

مهمترين كاربرد اين ضرب يافتن مؤلفه يا تصوير يك بردار در جهت (راستا) خاصي است: كافي است بردار واحد آن جهت خاص را در بردار مذكور ضرب داخلي كرد.

مثال:

$$\vec{A}=A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z$$

با توجه به عمود بودن بردارهاي واحد سه جهت z, y, x بر هم داريم:

$$\vec{A}.\hat{a}_x=A_x\hat{a}_x.\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y.\hat{a}_x+A_z\hat{a}_z.\hat{a}_x=(A_x\times 1)+\left(A_y\times 0\right)+\left(A_z\times 0\right)=A_x$$

همچنين: $\quad A_y=\hat{a}_y.\vec{A} \quad , \quad A_z=\hat{a}_z.\vec{A}$

و يا بطور كلي: مؤلفه بردار $\vec{A}$ در جهت و راستاي بردار $\vec{B}$: $A_B = \hat{a}_B.\vec{A}$

بنابراين واضح است كه: $A^2 = \vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}|\cos o^\circ$

۲- ضرب خارجي

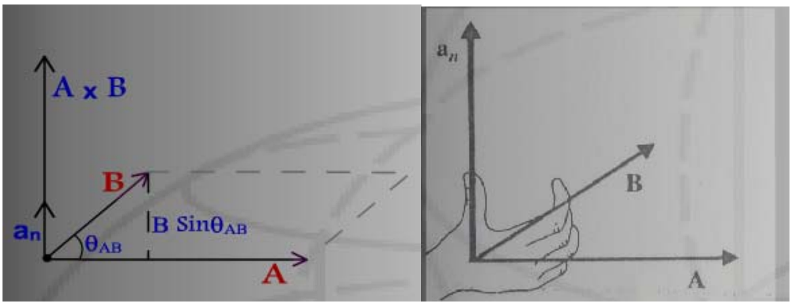
نتيجه اين ضرب يك بردار است و چون در نمايش آن از علامت كراس X استفاده مي‌شود به آن ضرب كراس نيز گفته مي‌شود Cross product

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = |\vec{C}| = AB\sin\theta_{AB}$$

θ_{AB} كوچكترين زاويه بين $\vec{B},\vec{A}$ است كه بردار $\vec{A}$ را در امتداد بردار $\vec{B}$ قرار مي‌دهد.

جهت بردار $\vec{C}$ بر دو بردار $\vec{B},\vec{A}$ عمود است و طبق قانون دست راست بدست مي‌آيد.



شكل ۸

واضح است كه:

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{A} \times \vec{B}$$

همچنين خاصيت توزيع‌پذيري در ضرب خارجي وجود دارد:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) + \left(\vec{A} \times \vec{C}\right)$$

ب- ضرب يك اسكالر در يك بردار

اين ضرب بصورت روبرو نمايش داده مي‌شود: $m\vec{A} = mA\hat{a}_A$

نتيجه اين ضرب بردار است با اندازه mبرابر $\vec{A}$ و چنانچه m مثبت باشد بردار نهائي هم جهت و در غير اينصورت در خلاف جهت بردار $\vec{A}$ خواهد بود.

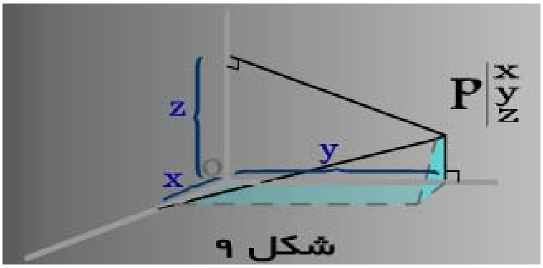
تقسيم: نها تعريفي كه در مورد تقسيم در مبحث بردارها وجود دارد تقسيم يك بردار بر يك اسكالر است كه همان مفهوم ضرب يك اسكالر در بردار را دارد: $\frac{\vec{A}}{m} = \frac{1}{m}\vec{A} = \frac{A}{m}\hat{a}_A$

دستگاه‌هاي مختصات متعامد Orthogonal coordinate systems

در اين درس سه دستگاه مختصات سه بعدي كه سه جهت آن بر هم عمود هستند را مورد بررسي و استفاده قرار مي‌گيرد.

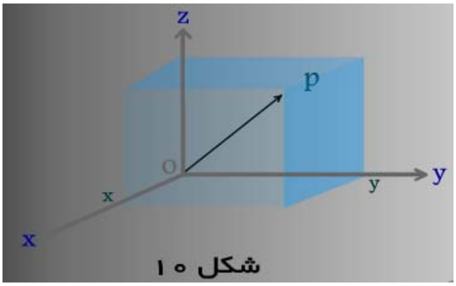
۱ – دستگاه مختصات مستطيلي Rectangular coordinates

بدليل آنكه با تشكيل يك مكعب مستطيل مي‌توان اين دستگاه را برپا كرده و موقعيت نقطه يا مكاني را مشخص نمود، مختصات مستطيلي به آن اتلاق مي‌شود. از ديگر نام‌هاي اين دستگاه دكارتي و كارتزين Cartesian است.



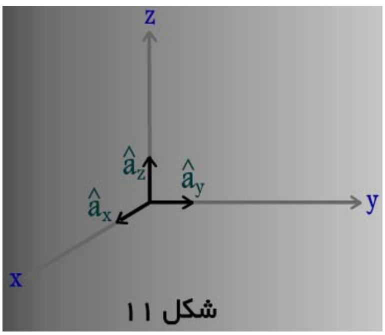
شکل ۹

در اين دستگاه با سه پارامتر x و y و z موقعيت يك نقطه روشن مي‌گردد. سه محور مربوطه در نقطه مبدأ مختصات بر هم عموداند. بنابراين براي يافتن مكان هر نقطه و يا انتهاي هر بردار كافي است كه از آن نقطه بر سه محور عمود كرد. بعنوان مثال نقطه P را در تصوير مشاهده مي‌كنيد. در واقع اين خطوط عمود، قطرهاي سه وجه از ٦ وجه يك مكعب مستطيل است كه مبدأ مختصات (O) و نقطه Pدر ابتدا و انتهاي قطر اصلي (بزرگ) آن واقع شده است.



شکل ۱۰

بردارهاي يكان سه جهت عبارتند از $\hat{a}_z, \hat{a}_z, \hat{a}_x$ و هر كدام با اندازه واحد و در جهت مثبت سه محور z, y, x و منطبق با سه محور فوق خواهند بود. كه بنابراين بر هم عمودند. پس:



شکل ۱۱

$$\hat{a}_x.\hat{a}_x = \hat{a}_y.\hat{a}_y = \hat{a}_z.\hat{a}_z = 1\times 1\times \cos 0 = 1$$

$$\hat{a}_x.\hat{a}_y = \hat{a}_x.\hat{a}_z = \hat{a}_y.\hat{a}_z = 1\times 1\times \cos 90 = 0$$

$$\hat{a}_x \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0$$

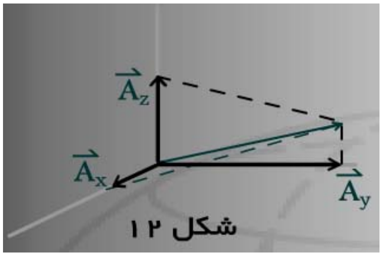
$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \quad , \quad \hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x \quad , \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$$

نمايش يك بردار در فضاي مختصات مسطيلي بصورت تحليلي:

$$\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$$

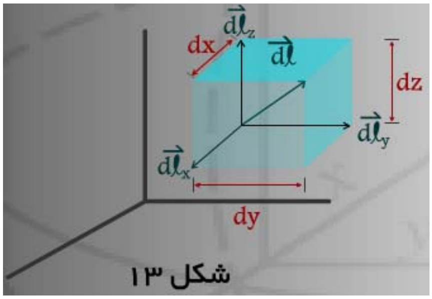
A_z, A_y, A_z بترتيب مؤلفه (تصوير) بردار $\vec{A}$ در سه جهت x و y و z مي‌باشند.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



شکل ۱۲

براي يك شكل كوچك ديفرانسيلي با ابعاد d_z, d_y, d_x مي‌توان بردار ديفرانسيلي طولي بقرار زير تعريف نمود.

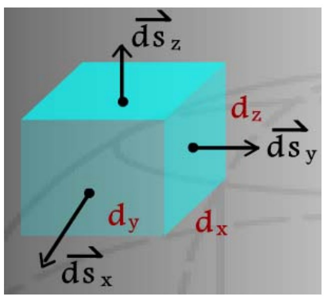


شکل ۱۳

$$d\vec{l} = d\vec{l}_x + d\vec{l}_y + d\vec{l}_z$$
$$d\vec{l}_x = dx\hat{a}_x \quad , \quad dl_x = dx$$
$$d\vec{l}_y = dy\hat{a}_y \quad , \quad dl_y = dy$$
$$d\vec{l}_z = dz\hat{a}_z \quad , \quad dl_z = dz$$

بنابراين: $d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$

با تعريف بردار نرمال (عمود) بر يك سطح كه عبارتست از برداري كه بر سطح مورد نظر عمود بوده در جهت خارج از سطح است و اندازه آن برابر مساحت آن سطح مي‌باشد، مي‌توان سه بردار نرمال به سطح با توجه به شكل ديفرانسيلي قبل ارائه كرد.



شكل ١٤

$$d\vec{s} = d\vec{s}_x + d\vec{s}_y + d\vec{s}_z$$
$$d\vec{s} = \hat{a}_x dydz \quad , \quad ds_x = dydz$$
$$d\vec{s}_y = \hat{a}_y dxdz \quad , \quad ds_y = dxdz$$
$$d\vec{s}_z = \hat{a}_z dxdy \quad , \quad ds_z = dxdy$$

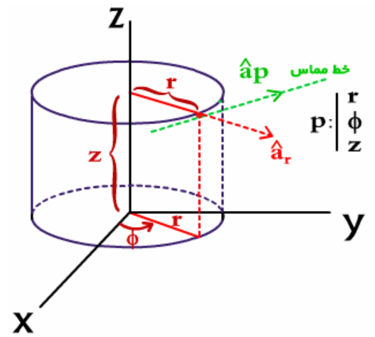
بنابراين: $d\vec{s} = \hat{a}_x dydz + \hat{a}_y dxdz + \hat{a}_z dxdy$

آخرين ترم ديفرانسيلي يك كميت اسكالر است ديفرانسيل حجم مي‌باشد: $dv = dxdydz$

براي مقادير ثابت x يا y يا z ، مكان‌هاي هندسي بوجود مي‌آيد كه متشكل از صفحات مسطح و بينهايت عمود بر سه محور x، y، z خواهد بود.

۲ – دستگاه مختصات استوانه‌اي Cylindrical coordinates

اين داستگاه مختصات سه بعدي بطريقي تعريف مي‌شود كه با برپائي يك شكل استوانه‌اي سه پارامتر نشان دهنده موقعيت يك نقطه را براحتي ميسر مي‌كند و بهمين دليل نام استوانه‌اي به اين دستگاه اتلاق شده است.



شكل ۱۵

سه پارامتر اين دستگاه z,φ,r است.

r فاصله عمودي از محور zهاست.

φ زاويه‌اي است كه تصوير r بر روي صفحه افق (xy) با جهت مثبت محور x مي‌سازد.

z همان كميت (پارامتر) سوم مختصات مستطيلي است.

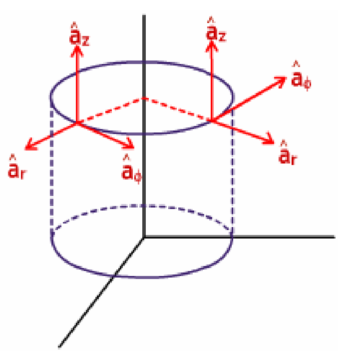
بنابراين مي‌توان استوانه‌اي تصور و رسم نمود كه شعاع قاعده آن r محور استوانه محور zها قاعده بالاي آن در موقعيت z=z قاعده پائين استوانه در سطح افقي واقع شده است و نقطه P روي لبه آن استوانه مستقر مي‌شود (ارتفاع استوانه برابر با z با پارامتر سوم مختصات نقطه P مي‌باشد) محدوده z,φ,r با توجه به تعريف انجام شده:

$$0 \le r \langle \infty \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad , \quad -\infty \langle z \langle +\infty$$

براي يافتن بردارهاي واحد سه جهت مربوطه يعني بترتيب $\hat{a}_z,\hat{a}_\varphi,\hat{a}_r$ كافي است در نقطه P در امتداد شعاع r در جهت دور شدن از محور z به اندازه واحد، بردار $\hat{a}_r$ را بدست آوريد.

اگر بر سطح استوانه و در نقطه P مماسي رسم گردد، امتداد اين مماس راستاي $\hat{a}_\varphi$ خواهد بود و جهت مثبت آن در جهت دور شدن از جهت مثبت محور xهاست. بنابراين واضح است كه $\hat{a}_\varphi,\hat{a}_r$ بر خلاف بردارهاي واحد مختصات مستطيلي وابسته به مكان خواهند بود.

$\hat{a}_z$ مشابه دستگاه مختصات مستطيلي تعريف مي‌شود.



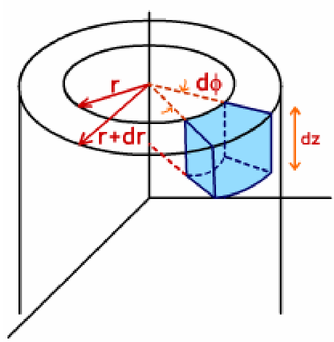
شكل ۱٦

مشابه مختصات مستطيلي در اين مختصات داريم:

$$\vec{A} = A_r\hat{a}_r + A_\varphi\hat{a}_\varphi + A_z\hat{a}_z$$

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_\varphi^2 + A_z^2}$$

براي تعريف بردارهاي ديفرانسيلي طولي و سطحي بايستي قسمتي از فضاي بين دو استوانه هم محور با اختلاف شعاع قاعده برابر با dr را در نظر گرفت اين حجم ديفرانسيلي كه داراي ارتفاعي برابر با dzاست در دهانه $d\varphi$ واقع ميشود.



شكل ۱۷

بنابراين بردار ديفرانسيل طولي:

$$d\vec{l} = d\vec{l}_r + d\vec{l}_\varphi + d\vec{l}_z$$

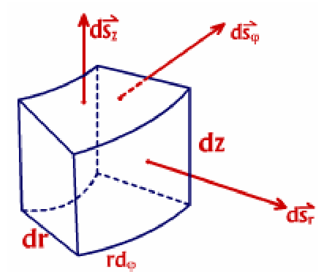
$$d\vec{l}_r = dr\hat{a}_r \quad , \quad dl_r = dr$$

$$d\vec{l}_\varphi = rd\varphi\hat{a}_\varphi \quad , \quad dl_\varphi = rd\varphi$$

$$d\vec{l}_z = dz\hat{a}_z \quad , \quad dl_z = dz$$

توجه داريم كه چون $d\varphi$ اندازه يك زاويه (برحسب راديان) است نميتواند بعنوان طول در نظر گرفته شود. بنابراين با توجه به كمان روبرو به زاويه $d\varphi$ از شعاع دايره r آنرا به طول تبديل كردهايم.

بردارهاي ديفرانسيلي سطحي



شكل ۱۸

$$d\vec{s} = d\vec{s}_r + d\vec{s}_\varphi + d\vec{s}_z$$

$$d\vec{s}_r = \hat{a}_r rd\varphi dz \quad , \quad ds_r = rd\varphi \times dz$$

$$d\vec{s}_\varphi = \hat{a}_\varphi drdz \quad , \quad ds_\varphi = dr \times dz$$

$$d\vec{s}_z = \hat{a}_z rdrd\varphi \quad , \quad ds_z = rd\varphi \times dr$$

براي كميت اسكالر ديفرانسيلي حجم در اين مختصات $dv = rdrd\varphi dz$ كه از ضرب سه بعد شكل ديفرانسيلي فوق يعني dr و $rd\varphi$ و dz بدست آمده است.

همچنين در خصوص ضرب داخلي و ضرب خارجي بردارهاي يكان اين دستگاه با توجه به متعامد بودن سه جهت:

$$\hat{a}_r.\hat{a}_r = \hat{a}_\varphi.\hat{a}_\varphi = \hat{a}_z.\hat{a}_z = 1$$

$$\hat{a}_r.\hat{a}_\varphi = \hat{a}_r.\hat{a}_z = \hat{a}_\varphi.\hat{a}_z = 0$$

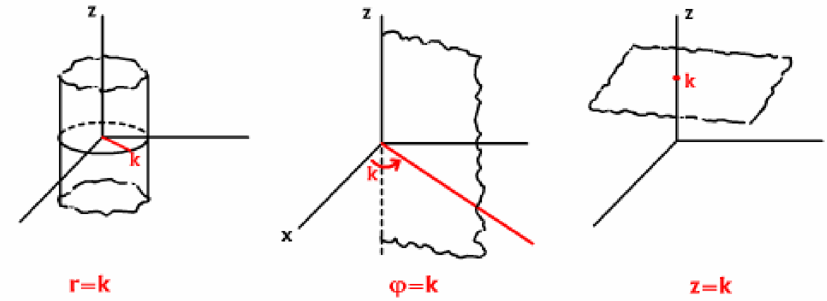
$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_z \quad , \quad \hat{a}_\varphi \times \hat{a}_z = \hat{a}_r \quad , \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_r = \hat{a}_\varphi$$

در اين مختصات براي پارامترهاي ثابت مكان هندسي خاصي را حاصل مي‌كند كه بقرار زير است:

براي r=k: سطح جانبي يك استوانه نامحدود با محوريت محور zها خواهد بود كه شعاع قاعده آن k مي‌باشد.

براي $\varphi = k$: يك نيم صفحه بينهايت، مسطح و محدود به محور zهاست كه در زاويه $\varphi = k$ قرار گرفته است.

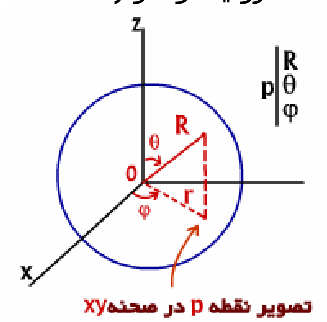
براي z=k: مشابه مختصات مستطيلي يك صفحه بينهايت، مسطح در ارتفاع z=k خواهد بود.



شكل ۱۹

۳ – دستگاه مختصات كروي Spherical coordinates

اين دستگاه در فضاي سه بعدي داراي سه پارامتر φ, θ, R است و چون با مرور كردن يك كره به شعاع R بمركز مبدأ مختصات از نقطه مورد نظري كه مي‌خواهيم مختصات آنرا نمايش دهيم تعريف مي‌شود بنابراين بنام مختصات كروي موسوم است.



R فاصله نقطه تا مبدأ مختصات است.

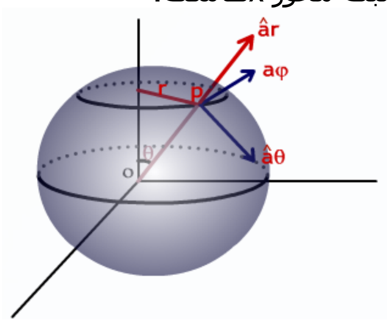
θ زاويه بين R و جهت مثبت محور zهاست.

و φ همان تعريف در مختصات استوانه‌اي را داراست يعني از تصوير كردن R در صفحه xy به r رسيده زاويه بين r و جهت مثبت محور xها زاويه φ خواهد بود.

بنابراين طبق تعاريف انجام شده محدوده سه پارامتر اين مختصات عبارتنداز:

$$0 \le R \langle \infty \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

بردارهاي واحد سه جهت تعريف شده بصورت زير بدست مي‌آيند كه بر هم عمودند.
چنانچه مركز o را به نقطه Pمتصل نمود ادامه دهيم، امتداد $\hat{a}_R$ بدست آمده و جهت آن در جهت دور شدن از مركز خواهد بود. حال اگر بر اين امتداد عمودي رسم نمائيم كه بر كره به شعاع R مماس بوده و در صفحه‌اي كه شامل محور oz خط R باشد، واقع گردد امتداد $\hat{a}_\theta$ مي‌دهد و جهت مثبت آن در جهت دور شدن از محور Z+ است. چنانچه بر سطح كره به شعاع Rدر نقطه P مماسي بموازات صفحه افق رسم شود $\hat{a}_\varphi$ را بدست مي‌آوريم كه جهت مثبت آن در جهت دور شدن از قسمت مثبت محور xهاست.



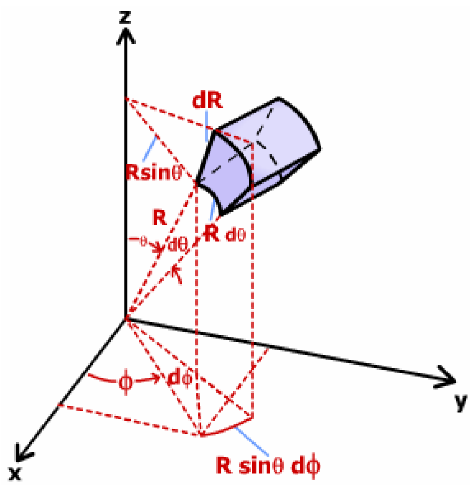
شكل ۲۰

ملاحظه مي‌شود كه در اين دستگاه مختصات هر سه بردار واحد وابسته به مكان خواهد بود يعني با تغيير نقطه P و يا انتهاي هر بردار در اين دستگاه بردارهاي $\hat{a}_R, \hat{a}_\theta, \hat{a}_\varphi$ ممكن است تغيير بنمايند. براي يك بردار مانند بردار $\vec{A}$

$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\varphi \hat{a}_\varphi$$

$$A = \sqrt{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2}$$

بردارهاي ديفرانسيلي طولي و سطحي را مي‌توان از حجم ديفرانسيلي كه محصور بين دو كره هم مركز با شعاع‌هاي R و R+dR است و محدود در زواياي $d\varphi, d\theta$ مي‌باشد بدست آورد.



شكل ۲۱

بنابراين بردار ديفرانسيلي طولي

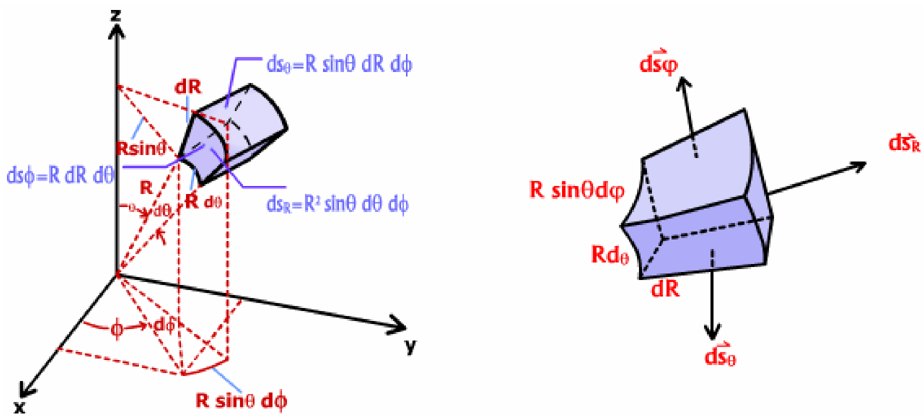
$$d\vec{l} = d\vec{l}_R + d\vec{l}_\theta + d\vec{l}_\varphi$$

$$d\vec{l}_R = \hat{a}_R dR \quad , \quad dl_R = dR$$
$$d\vec{l}_\theta = \hat{a}_\theta R d\theta \quad , \quad dl_\theta = R d\theta$$
$$d\vec{l}_\varphi = \hat{a}_\varphi R\sin\theta d\varphi \quad , \quad dl_\varphi = r d\varphi = R\sin\theta d\varphi$$

همچنين بردار ديفرانسيلي نرمال به سطح:

$$d\vec{s} = d\vec{s}_R + d\vec{s}_\theta + d\vec{s}_\varphi$$
$$d\vec{s}_R = \hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad , \quad ds_R = R\sin\theta d\varphi \times R d\theta$$
$$d\vec{s}_\theta = \hat{a}_\theta R\sin\theta dR d\varphi \quad , \quad ds_\theta = R\sin\theta d\varphi \times dR$$
$$d\vec{s}_\varphi = \hat{a}_\varphi R dR d\theta \quad , \quad ds\varphi = R d\theta \times dR$$

براي كميت اسكالر ديفرانسيلي حجم $dv = R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi$ كه از حاصل ضرب سه بعد $R\sin\theta d\varphi, R d\theta, dR$ حاصل شده است.



شكل ٢٢

در اين مختصات نيز ضرب‌هاي داخلي و خارجي بردارهاي واحد سه جهت عمود بر هم بصورت زير بدست مي‌آيند.

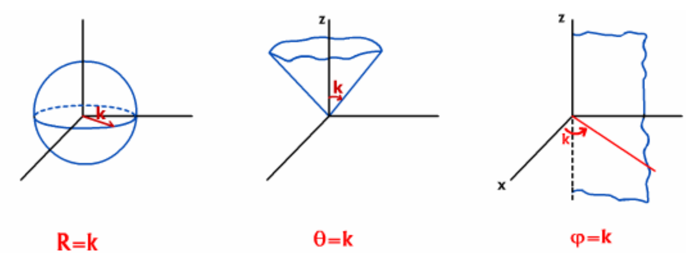
$$\hat{a}_R.\hat{a}_R = \hat{a}_\theta.\hat{a}_\theta = \hat{a}_\varphi.\hat{a}_\varphi = 1$$
$$\hat{a}_R.\hat{a}_\theta = \hat{a}_R.\hat{a}_\varphi = \hat{a}_\theta.\hat{a}_\varphi = 0$$
$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\varphi \quad , \quad \hat{a}_\theta \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_R \quad , \quad \hat{a}_\varphi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta$$

مكان هندسي پارامترهاي ثابت در اين دستگاه مختصات طبق تعاريف قبلي بصورت زير بدست مي‌آيند.

براي R=k كره‌اي خواهد بود به شعاع k بمركز مبدأ مختصات

براي $\theta = k$ مخروط وارونى با زاويه رأس K واقع در مبدأ مختصات كه داراي ابعاد بينهايت است.

براي $\varphi = k$ مشابه مختصات استوانه‌اي، نيم صفحه بينهايت و محدود به محور zهاست كه در زاويه $\varphi = k$ قرار گرفته است.



شكل ٢٣

تبديل مختصات مستطيلي، استوانه‌اي و كروي به يكديگر

گاهي اوقات بايستي مختصات نقطه‌اي كه در دستگاه مختصات نمايش داده شده است در دستگاه ديگري بيان شود و يا نمايش تحليلي بردار را در مختصات ديگري ارائه شود كه عمده‌ترين علت جمع و يا تركيب دو برداري است كه در دستگاه مختصاتي ارائه شده‌اند كه بردارهاي واحد آنها تابع مكان هستند يعني: $\hat{a}_r, \hat{a}_\varphi, \hat{a}_R, \hat{a}_\theta$

بنابراين نيازمند تبديل پارامترها و مؤلفه‌هاي مختلف در يك دستگاه به دستگاه ديگر است.

-تبديل مختصات استوانه‌اي به مستطيلي و برعكس

تبديل متغير يا پارامترهاي مختصات استوانه‌اي به مستطيلي:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

برعكس:

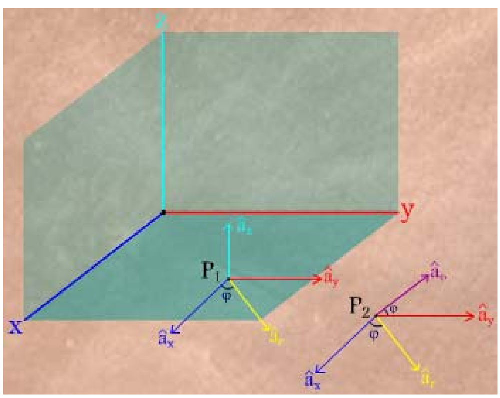
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1} y/x$$
$$z = z$$

اگر $\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$

براي رسيدن به نمايش اين بردار در مختصات استوانه‌اي بايد A_z, A_φ, A_r را بدست آورد.

بنابراين: $A_r = \hat{a}_r.\vec{A} \quad , \quad A_\varphi = \hat{a}_\varphi.\vec{A} \quad , \quad A_z = \hat{a}_z.\vec{A}$

$$A_r = \hat{a}_r.(A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)$$
$$= A_x\hat{a}_r.\hat{a}_x + A_y\hat{a}_r.\hat{a}_y + A_z\hat{a}_r.\hat{a}_z$$



$$\hat{a}_r.\hat{a}_x = 1\times1\times\cos\varphi$$
$$\hat{a}_r.\hat{a}_y = \cos(90-\varphi) = \sin\varphi$$
$$\hat{a}_r.\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_x = \cos(90+\varphi) = -\sin\varphi$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_y = \cos\varphi$$
$$\hat{a}_\varphi.\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_z.\hat{a}_x = \hat{a}_z.\hat{a}_y = 0 \quad , \quad \hat{a}_z.\hat{a}_z = 1$$

ماتریس تبدیل مختصات مستطیلي به استوانه‌اي:
$$\begin{bmatrix} A_r \\ {}_{\varphi} \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ {}_{y} \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعکس:ماتریس تبدیل مختصات استوانه‌اي به مستطیلي:
$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

مثال: مطلوبست نمایش بردار $\vec{A}$ در مختصات مستطیلي:
$$\vec{A} = \hat{a}_r 3\cos\varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5$$

بنابراین
$$A_r = 3\cos\varphi \quad , \quad A_\varphi = -2r \quad , \quad A_z = 5$$

روش اول:
$$A_x = \hat{a}_x.\vec{A} = \hat{a}_x.\left(\hat{a}_r 3\cos\varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5\right)$$
$$= \hat{a}_x.\hat{a}_y 3\cos\varphi - \hat{a}_x.\hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_x.\hat{a}_z$$
$$= \cos\varphi \times 3\cos\varphi - (-\sin\varphi)2r + 0 = 3\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi$$
$$A_y = \hat{a}_y.\vec{A} = 3\sin\varphi\cos\varphi - 2r\cos\varphi$$
$$A_z = \hat{a}_z.\vec{A} = 5$$

سپس پارامترهاي موجود در مؤلفه‌هاي بدست آمده را به مختصات مستطیلي تبدیل مي‌کنیم:
$$A_x = 3\frac{x^2}{x^2+y^z} + 2y \quad , \quad A_y = 3\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2x = \frac{3xy}{x^2+y^2} - 2x$$

بنابراین:
$$\vec{A} = \hat{a}_x\left(\frac{3x^2}{x^2+y^2} + 2y\right) + \hat{a}_y\left(\frac{3xy}{x^2+y^2} - 2x\right) + \hat{a}_z 5$$

روش دوم:

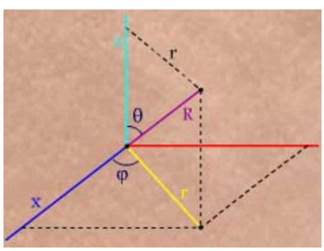
استفاده از ضرب ماتریسي:
$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\cos\varphi \\ -2r \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos^2\varphi + 2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi\cos\varphi - 2r\cos\varphi \\ 5 \end{bmatrix}$$

که همان نتیجه روش قبل است.

تمرین: مطلوبست نمایش بردار مکان $\vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ در دستگاه مختصات استوانه‌اي

-تبدیل متغیرهاي مختصات کروي به مستطیلي و برعکس

تبدیل متغیرهاي مختصات کروي به مستطیلي



$$x = R\sin\theta\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = R\cos\theta$$

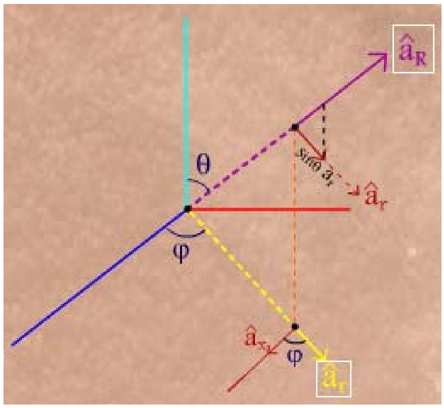
برعكس:

$$R=\sqrt{x\ \ +y\ \ +z^2}$$

$$\theta=\cos^{1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

با توجه به شكل



$$\hat{a}_R.\hat{a}_x=\cos(90-\theta)\hat{a}_r.\hat{a}_x=\sin\theta\times\cos\varphi$$

ماتريس تبديل مختصات مستطيلي به كروي:

$$\begin{bmatrix}A_R\\A_\theta\\A_\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$$

و برعكس: ماتريس تبديل مختصات كروي به مستطيلي:

$$\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_R\\A_\theta\\A_\varphi\end{bmatrix}$$

مثال:

بردار مكان يك نقطه كلي در مختصات كروي را بدست آوريد:

$$\vec{A}=x\hat{a}_x+y\hat{a}_y+z\hat{a}_z$$

$$\begin{bmatrix}A_R\\A_\theta\\A_\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A_R\\A_\theta\\A_\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\sin\theta\cos\varphi+y\sin\theta\sin\varphi+z\cos\theta\\ y\cos\theta\cos\varphi+y\cos\theta\sin\varphi-z\sin\theta\\ -x\sin\varphi+y\cos\varphi+0\end{bmatrix}$$

$$A_R=x\sin\theta\cos\varphi+y\sin\theta\sin\varphi+z\cos$$

$$=R\sin^2\theta\cos^2\varphi+R\sin^2\theta\sin^2\varphi+R\cos^2\theta$$

$$=R\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+R\cos^2\theta$$

$$=R\sin^2\theta+R\cos^2\theta$$

$$=R(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=R$$

و به همين ترتيب $=0 \quad , \quad =0$

بنابراين: $\vec{A}=R\hat{a}_R$

و يا $\vec{A}=\vec{R}$

-تبديل مختصات كروي به استوانه‌اي و برعكس:

اين تبديل بندرت استفاده مي‌شود:

تبديل پارمترها

$$\begin{cases} r = R\sin\theta \\ \varphi=\varphi \\ z=R\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R=\sqrt{r^2+z^2} \\ \theta=\cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ \varphi=\varphi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

انتگرال گيري

انتگرال‌هائي كه در ارتباط با بردارها مي‌باشند عبارتند از:

$$\int_c \vec{F}.d\vec{l}$$

$$\int_s \vec{F}.d\vec{s}$$

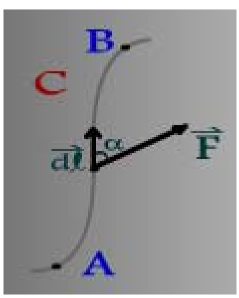
$$\int_v \vec{F}dv$$

$$\int_c f d\vec{l}$$

$$\int_c f d\vec{l}=\int_c f\left(\hat{a}_x+d_x+\hat{a}_y d_y+\hat{a}_z d_z\right)=\hat{a}_x\int_c f(x,y,z)dx+\hat{a}_y\int_c f(x,y,z)dy+\hat{a}_z\int_c f(x,y,z)d_z$$

اما مهمترين انتگرال‌گيري، دو انتگرال اول $\int \vec{F}.d\vec{l}$ و $\int \vec{F}.d\vec{s}$ است كه بترتيب بنام انتگرال خطي و انتگرال سطحي از آن نام مي‌بريم.

انتگرال خطي Line Integral



بعنوان مثال $\int_{c\,A}^{B}\vec{F}.d\bar{l}$ روي مسيري مانند Cبصورت زير انجام مي‌گيرد.

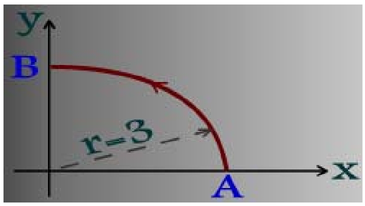
براي محاسبه آن در هر نقطه، مؤلفه $\vec{F}$ را که مماس بر منحني د رآن نقطه است $(F\cos\alpha)$را بدست آورده در طول dlضرب مي‌كنيم.

که همان مفهوم $\vec{F}.d\bar{l}$ است و نتيجه انتگرال‌گيري تابع اسکالر $F\cos\alpha dl$ از نقطه A تا B خواهد بود.

$$\int_A^B F\cos\alpha dl$$

مفهوم انتگرال خطي: چنانچه بردار $\vec{F}$ نيروي وارد بر جسمي باشد، اين انتگرال ميزان کار لازم براي حرکت جسم روي مسير C از نقطه A به B مي‌باشد که مي‌تواند متناسب با انرژي لازم براي عمليات فوق باشد. $\oint_c \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

مثال: براي بردار داده شده $\vec{F}$ مطلوبست محاسبه انتگرال خطي $\int_A^B \vec{F}.d\bar{l}$ در امتداد يك چهارم دايره به شعاع ۳ که در شکل نشان داده شده است.



$$\vec{F} = \hat{a}_x xy - \hat{a}_y 2x \quad , \quad A:\begin{vmatrix}3\\0\\0\end{vmatrix} \quad B:\begin{vmatrix}0\\3\\0\end{vmatrix}$$

روش اول: در مختصات مستطيلي

$$\overrightarrow{dl} = \hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy + \hat{a}_z dz$$

$$\vec{F}.\overrightarrow{dl} = xydx - 2xdy$$

معادله مسير: دايره‌اي به شعاع ۳ $\quad x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad 0 \le x, y \le 3$

و چون مسير در ربع اول است x و y هر دو مثبت: $\quad \Rightarrow x = \sqrt{9-y^2} \quad , \quad y = \sqrt{9-x^2}$

بنابراين:

$$\int_A^B \vec{F}.d\bar{l} = \int_A^B (xydx - 2ydy) = \int_A^B xydx - \int_A^B 2xdy$$

$$= \int_3^0 x\sqrt{9-x^2}dy - \int_0^3 2\sqrt{9-y^2}dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2}\right]_3^0 - \left[y\sqrt{9-y^2} + 9\sin^{-1}\frac{y}{x}\right]_0^3 = -9(1+\pi/2)$$

روش دوم: در مختصات استوانه‌اي

$$\begin{bmatrix}F_r\\F_\varphi\\F_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}xy\\-2x\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \hat{a}_r(xy\cos\varphi - 2x\sin\varphi) - \hat{a}_\varphi(xy\sin\varphi + 2x\cos\varphi)$$

$$d\bar{l} = \hat{a}_r dr + \hat{a}_\varphi r d\varphi + \hat{a}_z dz$$

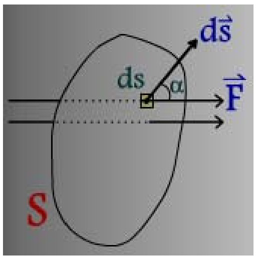
مسیر در موقعیت z=۰ و r=۳ قرار دارد به نحوي كه dr=۰ و dz=۰
بنابراين $d\vec{l}\Big|_{r=3} \equiv \hat{a}_\varphi 3d\varphi$ در نتيجه در محاسبه $\vec{F}.\vec{dl}$ تنها مؤلفه F_φ كارساز خواهد بود.
همچنين $x = 3\cos\varphi$ و $y = 3\sin\varphi$ در F_φ جايگزين كرده:

$$\int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -3\left(9\sin^2\varphi\cos\varphi + 6\cos^2\varphi\right)d\varphi = -9\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

انتگرال سطحي Surface Integral

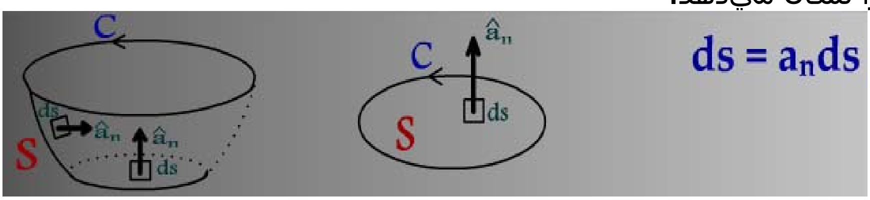
طريقه نمايش بصورت روبرو مي‌باشد: $\int_s \vec{F}.\vec{ds}$

و با توجه به تعريف $\vec{ds}$ كه بردار عمود بر سطح در جهت خارج از سطح است مؤ لفه $\vec{F}$ در جهت عمود بر سطح را بدست آورده $(F\cos\alpha)$ در ds ضرب مي‌كنيم و نهايتاً روي سطح s انتگرال مي‌گيريم:

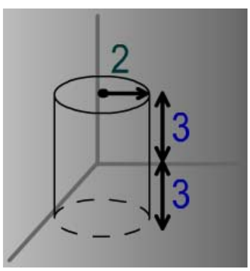


مفهوم انتگرال سطحي: چنانچه $\vec{F}$ بردار نمايش دهنده يك ميدان باشد انتگرال $\int_s \vec{F}.\vec{ds}$ كل فلو (شار) بردار $\vec{F}$ كه از سطح S خارج مي شود را محاسبه مي‌نمايد.
چنانچه سطح s باز باشد از نمايش روبرو استفاده مي كنيم: $\oint \vec{F}.d\vec{s}$

اگر سطح باز باشد جهت $d\vec{s}$ با استفاده از قانون دست راست بدست مي‌آيد.
انگشتان دست راست در جهت منحني C كه سطح باز S را محصور مي‌كند و انگشت شست جهت $d\vec{s}$ را نشان مي‌دهد.



مثال: محاسبه $\oint_s \vec{F}.d\vec{s}$ روي سطح استوانه داده شده در شكل براي تابع برداري $\vec{F}$:



$$\vec{F} = \hat{a}_r \frac{A}{r} + \hat{a}_z BZ$$

$$\oint_s \vec{F}.\vec{ds} = \int \vec{F}.\vec{ds} + \int \vec{F}.\vec{ds} + \int \vec{F}.\vec{ds}$$

سطح جانبي   قاعده پائين   قاعده بالا

$$at \quad z=3 \Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = d\hat{s}_z = \hat{a}_z r dr d\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{F}.d\vec{s}\,\big|_{z=3} = \left(Bzrdrd\varphi\right)\big|_{z=3} = 3Brdrd\varphi$$

$$\Rightarrow \int_{z=3} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3Brdrd\varphi = 12\pi B$$

$$at \quad z=-3 \Rightarrow \hat{a}_n = -\hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = -d\vec{s}_z = -\hat{a}_z r dr d\varphi$$

$$\Rightarrow \left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\big|_{z=-3} = -\left(-3Brdrd\varphi\right) = 3Brdrd\varphi$$

$$\Rightarrow \int_{z=-3} \vec{F}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3Brdrd\varphi = 12\pi B$$

$$at \quad r=2 \Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_r \Rightarrow d\vec{s} = d\vec{s}_r = \hat{a}_r r d\varphi dz$$

$$\left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\big|_{r=2} = \left(\frac{A}{r} rd\varphi rz\right)\big|_{r=2} = Ad\varphi dz$$

$$\Rightarrow \int_{r=2} \vec{F}.d\vec{s} = \int_{-3}^{3}\int_0^{2\pi} Ad\varphi dz = 12\pi A$$

$$\Rightarrow \oint \vec{F}.d\vec{s} = 12\pi B + 12\pi B + 12\pi A = 24\pi B + 12\pi A$$

مشتق‌گيري: در اين قسمت به ارائه سه عمل مشتق‌گيري مي‌پردازيم كه دو نوع آن بر روي بردارها صورت مي‌گيرد كه نتيجه يكي اسكالر و ديگري بردار است و نوع سوم مشتق خاصي است كه بر روي اسكالر انجام مي‌شود اما نتيجه آن يك بردار خواهد بود.

ديورژانس (بخش) يك تابع برداري Divergence

تعريف:

$$div.\left(\vec{F}\right) = \nabla.\vec{F} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s \vec{F}.d\vec{s}}{\Delta v}$$

بنابراين ديورژانس يك تابع برداري با فلوي خروجي از هر متر مكعب برابر مي‌گردد.

با صرفنظر كردن از طريقه عمليات، محاسبة ديورژانس در دستگاههاي مختصات متعامد معرفي شده بصورت زير خواهد بود.

در دستگاه مستطيلي
$$\nabla.\vec{F} = \partial\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

در دستگاه استوانه‌اي
$$\nabla.\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

در دستگاه كروي
$$\nabla.\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 F_R\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin F_\theta\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

كاربرد: اگر $\vec{V}$ سرعت حركت يك سيال در هر نقطه باشد و ρ چگالي حجمي آن سيال $\nabla.\left(p\vec{v}\right)=0$ به مفهوم آن خواهد بود كه سيال غير قابل تراكم‌پذيري است يعني شار (فلوي) جرم وارد شده به يك سطح بسته همواره با فلوي خارج شده از آن سطح برابر است و $\nabla.\left(p\vec{v}\right)\rangle 0$ نشان دهنده يك مادة قابل انفجار و بعنوان منبع source و $\nabla.\left(p\vec{v}\right)\langle 0$ براي يك فرآيند تراكم پذير نتيجه مي‌دهد و بعنوان حفره و گودال sink است.

كرل (پيچش) يك تابع برداري Curl

تعريف:

W.E

$$curl(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$$

$$(\nabla \times \vec{F})\Big|_s = (\nabla \times \vec{F}).\hat{a}_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\oint_c \vec{F} d\vec{l}}{\Delta s}$$

با توجه به تعريف فوق مشخص است كه چنانچه $\vec{F}$ بر روي سطح Δs عمود باشد و يا تصويري نداشته باشد مؤلفه كرل $\vec{F}$ در جهت $\hat{a}_s$ وجود ندارد و يا بعبارتي چرخشي ندارد يعني پيچش اين بردار در جهت $\hat{a}_s$ برابر صفر است. بنابراين مؤلفه كرل هر بردار در هر جهت معياري از چرخش خطوط ميدان برداري فوق در صفحه عمود بر آن جهت است.

$\hat{a}_s$ مي‌تواند $\hat{a}_z, \hat{a}_y, \hat{a}_x$ يا هر جهت ديگر باشد.

در مختصات مستطيلي

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{a}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \hat{a}_y\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

در مختصات استوانه‌اي

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\varphi r & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

در مختصات كروي

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\varphi R\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_R & RF_\theta & R\sin F_\varphi \end{vmatrix}$$

گراديان (شيب) Gradient

گراديان بزرگترين مقدار مشتق يك تابع اسكالر نسبت به تغيير مكان مي‌باشد و جهتش در همان سمتي كه بزرگترين مقدار مشتق نسبت به تغيير مكان اتفاق مي‌افتد مي‌باشد بنابراين گراديان يك مشتق گيري جهتي است. directional derivative

براي درك مفهوم گراديان تابع اسكالر ϕ را در نظر بگيريد:

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta l}$$

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$$

اگر Δl كمترين مقدار باشد، $\frac{\Delta \phi}{\Delta l}$ بزرگترين تغييرات (مشتق) را خواهد داشت براي محاسبه بيشترين تغييرات بايد $\Delta l = \Delta n$ شود:

$$\left.\frac{\Delta \phi}{\Delta l}\right|_{\max} = \frac{\Delta \phi}{\Delta n}$$

يعني

$$grad(\phi) = \nabla \phi = \frac{d\phi}{dn}\hat{a}_n$$

در مختصات مستطيلي

$$\nabla \phi = \hat{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

در مختصات استوانه اي
$$\nabla\phi = \hat{a}_r \frac{\partial\phi}{\partial} \quad \hat{a}_\phi \frac{}{r}\frac{\phi}{\partial} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial}$$

در مختصات كروي
$$\nabla\phi = \hat{a}_R \frac{\partial\phi}{\partial R} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

قضايائي بر روي توابع برداري

- فضاي صفر (Null)
$$\nabla\times\nabla\phi = 0$$
$$\nabla.\left(\nabla\times\vec{F}\right) = 0$$

- قضيه گاوس (ديورژانس)

براي هر سطح بسته s كه شامل حجم v است.
$$\int_v \nabla.\vec{F}dv = \oint_s \vec{F}.d\vec{s}$$

- قضيه استوكس Stokes

براي هر مسير بسته c كه شامل سطح باز s است.
$$\int_s \nabla\times\vec{F}.\overrightarrow{ds} = \oint_c \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

- قضيه هلمهولتس Helmholtz

با توجه به شكل رياضي اين قضيه در محيط نامحدود
$$\vec{F}\left(\vec{R}\right) = -\nabla\int_v \frac{\nabla'.\vec{F}\left(\vec{R}'\right)}{4\pi\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dv' + \nabla\times\int_v \frac{\nabla'\times\vec{F}\left(\vec{R}'\right)}{4\pi\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dv'$$

اين قضيه چنين بيان مي‌شود كه هر ميدان برداري توسط پخشش و پيچش (ديورژانس و كرل) ميدان كاملاً مشخص مي‌شود يعني براي مشخص كردن كامل ميدان $\vec{F}$ فقط نياز به داشتن $\nabla.\vec{F}$ و $\nabla\times\vec{F}$ است.

بيان ديگر: يك ميدان برداري يا تابع برداري را مي‌توان بصورت مجموع گراديان يك تابع اسكالر و كرل يك تابع برداري نوشت $\vec{F} = -\nabla V + \nabla\times\vec{A}$

مثال‌هاي كاربردي قضاياي فوق در آخر فصل ارائه خواهد شد.

مشتقات مرتبه بالاتر

علاوه بر قضاياي صفر، لاپلاسين نيز يك مشتق از مرتبه بالاتر مي‌باشد:
$$\nabla^2\phi = \nabla.(\nabla\phi)$$

مثلاً در مختصات مستطيلي
$$\nabla.\nabla\phi = \nabla.\left(\hat{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$
$$= \left(\hat{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$
$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

در مختصات استوانه‌اي
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{d\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

در مختصات كروي
$$^2\phi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{R}\Big({}^2\frac{\partial\phi}{R}\Big) \quad \frac{}{R\ \ \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{d\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

نوع ديگر مشتقات از درجه بالاتر
$$\nabla\times\nabla\times\vec{F}=\nabla\left(\nabla.\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$$

كه در آن (مختصات مستطيلي)
$$\nabla^2\vec{F}=\hat{a}_x\left(\frac{\partial^2F_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_x}{\partial z^2}\right)+\hat{a}_y\left(\frac{\partial^2F_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_y}{dy^2}+\frac{\partial^2F_y}{\partial z^2}\right)+\hat{a}_z\left(\frac{\partial^2F_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_z}{\partial z^2}\right)$$

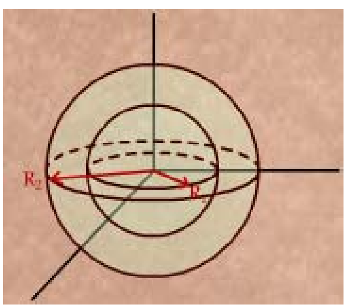
- برخي روابط مشتق‌گيري

$$\nabla.\left(\phi\vec{F}\right)=\phi\nabla.\vec{F}+\nabla\phi.\vec{F}$$
$$\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right)=\phi\nabla\times\vec{F}+\nabla\phi\times\vec{F}$$
$$\nabla.\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\nabla.\vec{A}+\nabla.\vec{B}$$
$$\nabla\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\nabla\times\vec{A}+\nabla\times\vec{B}$$

مثال ۱: يك ابر الكتروني در ناحية بين دو كره هم مركز (در مبدأ مختصات) به شعاع‌هاي۲ و ۵ سانتيمتر داراي چگالي بار c/m^3 $\rho=\frac{-3\times10^{-8}}{R^4}\cos^2\phi$ مستقر شده‌اند مطلوبست محاسبه كل بار محصور شده در اين ناحيه.

$$Q=\int_v\rho dv'$$
$$dv'=R'^2\sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$
$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{0.02}^{0.05}\frac{-3\times10^{-8}\cos^2\varphi'}{R'^4}R'^2\sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$
$$=-3\times10^{-8}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{0.02}^{0.05}\frac{1}{R'^2}\cos^2\varphi'\sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$
$$=-3\times10^{-8}\left[\frac{\varphi'}{2}+\frac{\sin2\varphi'}{4}\right]_0^{2\pi}\times\left[-\cos\theta'\right]_0^{\pi}\times\left[-\frac{1}{R'}\right]_{0.02}^{0.05}$$
$$=-1.8\pi \quad \mu c$$

مثال ۲: براي تابع برداري داده شده $\vec{F}=\hat{a}_R KR$ ، تعيين كنيدكه آيا قضيه ديورژانس براي ناحيه محصور شده توسط سطح‌هاي كروي در $R=R_1$ و $R=R_2$ (به نحويكه $R_2\rangle R_1$) هم مركز در مبدأ مختصات همانطور كه در شكل نشان داده شده است، صادق مي‌باشد؟ (kعدد ثابت)



$$\oint_s\vec{F}.\vec{ds}=\int_{s_2}\vec{F}.d\vec{s}+\int_{s_1}\vec{F}.d\vec{s}$$

$$S_1 : R = R_1 \quad , \quad d\vec{s}_1 = -d\vec{s}_R = -\hat{a}_R R_1^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\int \left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\Big|_{s_1} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (KR_1)\hat{a}_R.(-\hat{a}_R R_1^2 \sin\theta d\theta d\varphi) = -4\pi K R_1^3$$

$$S_2 : R = R_2 \quad , \quad d\vec{s}_2 = d\vec{s}_R = \hat{a}_R R_2^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\int \left(\vec{F}.d\vec{s}\right)\Big|_{s_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (KR_2)\hat{a}_R.\hat{a}_R R_2^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi K R_2^3$$

بنابراین

$$\oint_s \vec{F}.d\vec{s} = 4\pi k\left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

اما

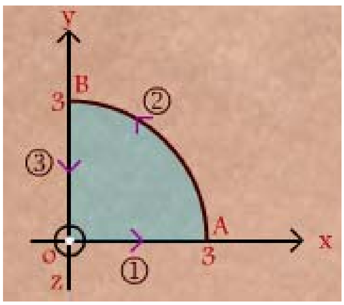
$$\nabla.\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 F_R\right) + 0 + 0 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(KR^3\right) = 3K$$

$$\int_v \nabla.\vec{F} dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_1}^{R_2} 3K \underbrace{R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi}_{dv} = 3k\left[\frac{4\pi}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\right] = 4\pi k\left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \oint_s \vec{F}.d\vec{s} = \int_v \nabla.\vec{F} dv$$

مثال ۳:

براي بردار داده شد $\vec{F} = \hat{a}_x xy - \hat{a}_y 2x$ صحت قضيه استوکس روي يك ربع ديسك به شعاع ۳ که در ناحيع اول دستگاه مختصات قرار دارد را بررسي کنيد.



$$\int_c \vec{F}.\vec{dl} = \int_0^A \vec{F}.\vec{dl} + \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} + \int_B^0 \vec{F}.\vec{dl}$$

مسير ۱:

$$y = 0 \quad , \quad dy = 0 \quad , \quad d\vec{l} = \hat{a}_x dx$$

$$\Rightarrow \vec{F}.d\vec{l} = \left(-\hat{a}_y 2x\right)\left(\hat{a}_x dx\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^A \vec{F}.d\vec{l} = 0$$

مسير ۲: قبلاً در مثالي محاسبه گرديد.

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = -9\left(1 + \pi/2\right)$$

مسير ۳:

$$x = 0 \quad , \quad dx = 0 \quad , \quad d\vec{l} = -\hat{a}_y dy \quad , \quad F = 0$$

$$\Rightarrow F d\vec{l} = (0).d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_B^0 \vec{F}.d\vec{l} = 0$$

بنابراين

$$\oint_c \vec{F}.d\vec{l} = -9\left(1 + \pi/2\right)$$

اما

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & -2x & 0\end{vmatrix}= \quad {}_x(\quad) \quad \hat{a}_y(0)=\hat{a}_z\left(\frac{\partial(-2x)}{\partial x}-\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right)=\hat{a}_z(-2-x)$$

$$\int_s \nabla\times\vec{F}.d\vec{s} \qquad , \qquad d\vec{s}_z=\hat{a}_z dxdy$$

$$\int_s \nabla\times\vec{F}.d\vec{s}=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}-(2+x)dxdy=-\int_0^3\left[2\sqrt{9-y^2}+\frac{1}{2}\left(9-y^2\right)\right]dy$$

$$=-\left[y\sqrt{9-y^2}+9\sin^{-1}\frac{y}{3}+\frac{9}{2}y-\frac{y^3}{9}\right]_0^3=-9\left(1+\pi/2\right)$$

روش دیگر: محاسبه در مختصات استوانه‌اي

$$\nabla\times\vec{F}=-\hat{a}_z(2+x)=\hat{a}_z(2+r\cos\varphi)$$

$$d\vec{s}=\hat{a}_z r dr d\varphi$$

$$\int_s \nabla\times\vec{F}.d\vec{s}=\int_0^{\pi/2}\int_0^3 -(2+r\cos\varphi)rdrd\varphi=-\int_0^{\pi/2}\int_0^3 2rdrd\varphi-\int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^2\cos\varphi drd\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left(r^2\right)\Big]_0^3+\left(\frac{1}{3}r^3\right]_0^3\left[-\sin\varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$=-9\times\pi/2-9\times1=-9\left(1+\pi/2\right)$$

بنابراین

$$\oint_c \vec{F}.\vec{dl}=\int_s \nabla\times\vec{F}.d\vec{s}$$

فصل دوم

ميدان‌هاي الكتريكي ساكن Static Electric Fields

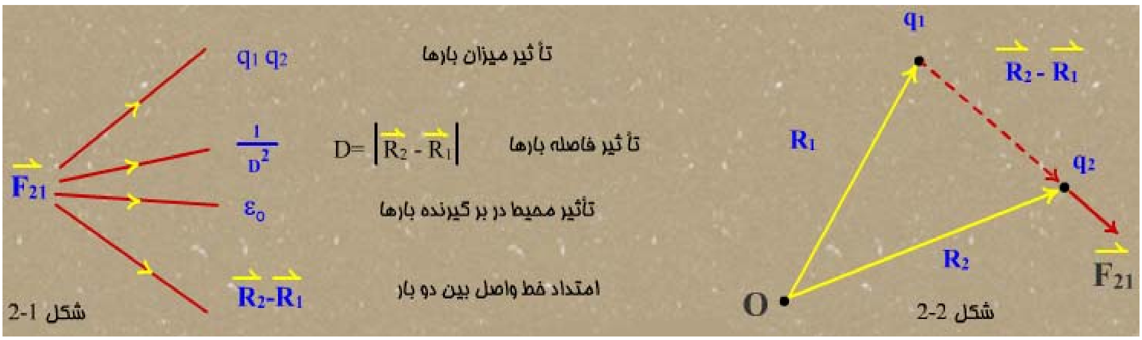
مبناي قوانين حاكم بر ميدان‌هاي الكتريكي ساكن نيروي جاذبه يا دافعه بين بارهاي الكتريكي مي‌باشد كه همان قانون كولمب است.

افرادي كه در اين زمينه مطالعات و بررسي‌هاي علمي انجام داده‌اند: تالس، گيلبرت و نهايتاً افسر فرانسوي بنام كولمب مي‌باشد كه توانست اندازه‌گيري‌هاي دقيقي روي اين نيرو انجام دهد.

قانون كولمب در فضاي آزاد (خلاء) Free space

در آزمايش‌هاي بعمل آمده توسط كولمب به نتايج زير در خصوص نيروي وارد بر يك بار الكتريكي ناشي از بار الكتريكي ديگر دست يافت:

با توجه به وجود دو بار الكتريكي q_1 و q_2 كه به ترتيب در موقعيت $\vec{R}_1$ و $\vec{R}_2$ قرار گرفته‌اند



بنابراين:

$$\vec{F}_{21} \propto \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0 \left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|^2} \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{\left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|}$$

بردار واحد $\vec{R}_2 - \vec{R}_1$ برابر است با: $\dfrac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{\left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|}$

ضريب نفوذپذيري الكتريكي خلاء Electric permitivity coeficient of Free-space

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} = 8.85 \times 10^{-12} \left[F/m\right] \text{ يا } \left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$$

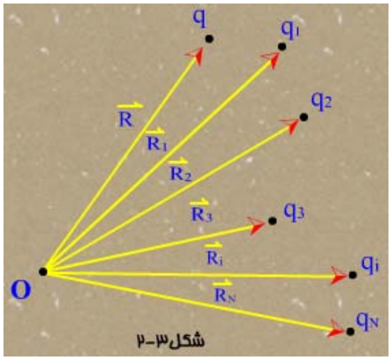
ضريب تناسب معادله محاسبه براي دستگاه اندازه‌گيري MKS يا SIبرابر $\dfrac{1}{4\pi}$ مي‌باشد.

بنابراين

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|^3}\left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right)$$

بدليل داشتن رابطه خطي نيروي فوق با ميزان بارها، چنانچه چندين بار در فضاي خلاء وجود داشته باشد مي‌توان چنين نوشت:

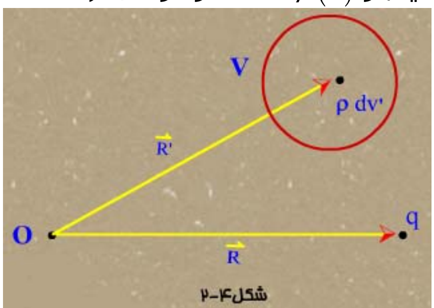
براي N بار گسسته:



شکل ۲-۳

$$\vec{F}_q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{qq_i\left(\vec{R}-\vec{R}_i\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}_i\right|^3}$$

و براي يك بار پيوسته به چگالي بار $\rho\left(\vec{R}\right)$ مستقر در حجم V



شکل ۲-۴

$$d\vec{F}_q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\rho\left(\vec{R}'\right)dv'\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

$$\vec{F}_q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{q\rho\left(\vec{R}'\right)dv'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)$$

مثال: سه بار نقطه اي q_1، q_2 و q كه بترتيب در نقاط p_1 و p_2 و p در فضاي خالي قرار گرفته‌اند را در نظر بگيريد نيرو وارد بر بار q چقدر است؟

$$\begin{cases}q_1=3.2\times10^{-9}c\\ p_1(2,1,0)\end{cases}\qquad\begin{cases}q_2=-4.8\times10^{-9}c\\ p_2(3,2,0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}q=-1.6\times10^{-9}c\\ p(1,2,0)\end{cases}$$

$$\vec{R}=\overrightarrow{OP}=\hat{a}_x(1-0)+\hat{a}_y(2-0)+\hat{a}_z(0-0)=\hat{a}_x+2\hat{a}_y$$

$$\vec{R}_1=\overrightarrow{OP_1}=2\hat{a}_x+\hat{a}_y$$

$$\vec{R}_2=\overrightarrow{OP}_2=3\hat{a}_x+2\hat{a}_y$$

$$\vec{R}-\vec{R}=\hat{a}_x(1-2)+\hat{a}_y(2-1)=-\hat{a}_x+\hat{a}_y$$

$$\left|\vec{R}-\vec{R}_1\right|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\vec{R}-\vec{R}_2=-2\hat{a}_x$$

$$\left|\vec{R}-\vec{R}_2\right|=2$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum^{2} \frac{qq_i}{\left|\vec{R}-\vec{R}_i\right|}\left(\vec{R}-\vec{R}_i\right)$$

$$\vec{F}_q = \frac{-1.6\times10^{-9}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}}\left[\frac{3.2\times10^{-9}}{\left(\sqrt{2}\right)^3}\left(-\hat{a}_x+\hat{a}_y\right)+\frac{-4.8\times10^{-9}}{2^3}\left(-2\hat{a}_x\right)\right]$$

$$\vec{F}_q = \left(-\hat{a}_x-\hat{a}_y 16.3\right)\times10^{-9} \qquad N$$

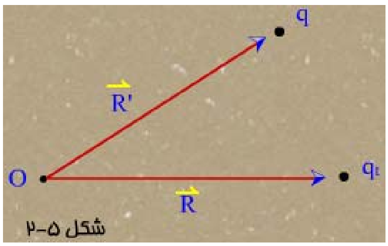
ميدان الكتريكي و شدت ميدان الكتريكي در فضاي خالي

وجود يك بار الكتريكي در فضا، به تمام نقاط آن فضا خاصيتي الكتريكي مي‌دهد (ميدان الكتريكي) به نحويكه بارهاي ديگر از وجود اين بار آگاه مي‌شوند.

بجاي محاسبه نيرو در معرفي يك ميدان، از شدت ميدان الكتريكي استفاده مي‌شود كه بصورت زير بيان و تعريف مي‌گردد:

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \lim_{q_t\to 0}\frac{\vec{F}\left(\vec{R}\right)}{q_t} \qquad \left[{}^{N}\!/_{C}\right] \text{ يا } \left[{}^{V}\!/_{m}\right]$$

$\vec{F}$ نيروي وارد بر بار كوچك آزمايشي q_t كه در نقطه $\vec{R}$ قرار دارد.



شكل ۲-۵

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

بعبارتي $\vec{E}$ شدت ميدان الكتريكي در هر نقطه برابر است با نيروي وارد بر بار ۱+ كولمبي

بنابراين براي مجموعه بارهاي گسسته

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i\left(\vec{R}-\vec{R}_i\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

براي بار پيوسته حجمي

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho\left(\vec{R}'\right)dv'\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

چگالي بار حجمي پيوسته $=\rho$ با واحد ${}^{c}\!/_{m^3}$

بار پيوسته سطحي

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\rho_s\left(\vec{R}'\right)ds}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)$$

چگالي بار پيوسته سطحي $=\rho_s$ با واحد ${}^{c}\!/_{m^2}$

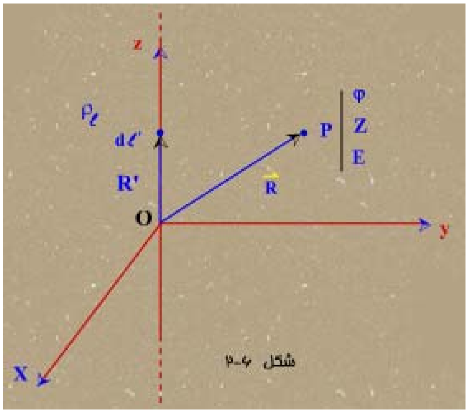
$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_c \frac{\rho_l\left(\hat{R}'\right)dl'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)$$

چگالي بار پيوسته خطي$=\rho_\ell$ با واحد ${}^{c}\!/_{m}$

مثال: محاسبه شدت ميدان الكتريكي ناشي از يك بار خطي به طول نامحدود، مستقيم با چگالي بار يكنواخت ρ_l در فضاي خلاء

مي‌توان پيش بيني كرد كه $\vec{E}$ مؤلفه z و φ نخواهد داشت.

$$\vec{E}(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_c \frac{\rho_l(\vec{R}')dl'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}(\vec{R}-\vec{R}')$$



شكل ۶-۲

$$\vec{R}=x\hat{a}_x+y\hat{a}_y+z\hat{a}_z=r\hat{a}_r+z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}'=z'\hat{a}_z$$

$$\vec{R}-\vec{R}'=r\hat{a}_z+(z-z')\hat{a}_z$$

$$\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|=\sqrt{r^2+(z-z')^2} \qquad dl'=dz'$$

$$\vec{E}(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho_l dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left[r\hat{a}_r+(z-z')\hat{a}_z\right]$$

$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\hat{a}_r\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{rdz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\hat{a}_z\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(z-z')dz'}{\left[r^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\hat{a}_r\left[\frac{z'-z}{r\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\hat{a}_z\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}\right\}$$

$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\hat{a}_r\frac{2}{r}+0=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r$$

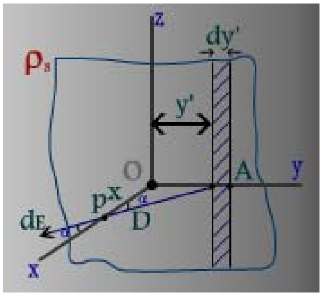
بنابراين $\vec{E}$ از نظر اندازه مستقل از z,φ است و تنها در جهت $\hat{a}_r$ مؤلفه دارد و صرفاً وابسته به فاصله (عمومي) از منبع (بار خطي) است (r)

بايد توجه كرد كه چون $\hat{a}_r$ وابسته به φ مي‌باشد، جهت $\vec{E}$ وابسته به φ خواهد بود.

مثال: تعيين شدت ميدان الكتريكي ناشي از يك بار صفحه‌اي مسطح، بي‌نهايت و با چگالي يكسان ρ_s.

براي حل صفحه را محدود را در موقعيت x=۰ (صفحه yz) قرار مي‌دهيم.

چون در دو جهت y , z نامحدود مي‌باشد پس $\vec{E}$ تنها در جهت x مؤلفه دارد.



ساده‌ترين نقطه براي محاسبه $\vec{E}$ نقطه $P\begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ يعني نقطه‌اي روي محور xهاست.

روش اول: استفاده از فرمول كلي $\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_s\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)dz'dy'}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$ و با انتخاب ديفرانسيلي از سطح با مقدار بار $\rho_s dz'dy'$ و ادامه كار

روش دوم: بكارگيري از نتايج مثال قبل (بار خطي نامحدود)

$$dE\Big|_p = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 D} = \frac{\rho_s dy'}{2\lambda\varepsilon_0 D} \qquad , \qquad d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

بدليل داشتن منبع بار خطي نا محدود $dE_y=0$ خواهد شد

$$dE_x = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\varepsilon_0 D}\cos\alpha \equiv dE$$

با جايگزيني $\cos\alpha$ و D بر حسب پارمترهاي اصلي (با توجه به مثلث OPA)

$$D = \sqrt{x^2 + y'^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

$$dE = \frac{xP_s dy'}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2 + y'^2\right)}$$

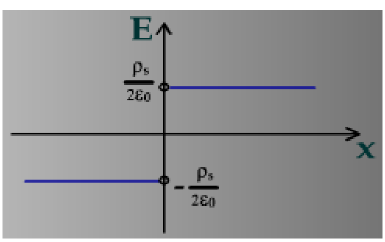
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\rho_s dy'}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2 + y'^2\right)} = \frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\frac{y'}{x}\Bigg]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x \qquad x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x \qquad x < 0$$

كه هيچگونه وابستگي به موقعيت نقطه‌اي كه شدت ميدان بدست خواهد آمد ندارد.

دليل: نامحدود بودن ابعاد بار صفحه‌اي



فلوي ميدان الكتريكي و قانون گاوس

الكتريكي خارج شده از سطح را محاسبه مي‌كند

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s}$$

چنانچه اين سطح كل منابع (بار الكتريكي) كه ميدان $\vec{E}$ را بوجود آورده را شامل شود اين انتگرال متناسب بار كل بار الكتريكي محصور شده در حجمي كه سطح s آنرا احاطه كرده خواهد بود.

بعبارتي:

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{total}$$

$$Q_{total} = \int_V \rho dv'$$

و يا

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho dv'$$

رابطه فوق قانون گاوس و سطح s، سطح گاوسي گفته مي‌شود. اين قانون مستقل از شكل سطح s است.

بعوان مثال براي يك بار نقطه‌اي واقع در مركز مختصات

براي يك سطح گاوسي كروي:

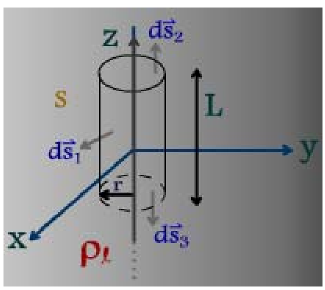
$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

اصل مهم: براي حل مسائل با استفاده از قانون گاوس بايستي سطحي انتخاب نمود كه E روي آن سطح ثابت باشد.

مثال: بار خطي بطول نا محدود و به چگالي $\rho_l \, {}^{c}\!/_{m}$ روي محور zها قرار دارد مطلوبست شدت ميدان الكتريكي در هر نقطه.

انتخاب سطح گاوسي: استوانه‌اي به طول L و با شعاع قاعده برابر با r و با محور منطبق با محور zها



$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho dv'$$

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \underbrace{\int \vec{E}.d\vec{s}_1}_{\text{سطح جانبي}} + \underbrace{\int \vec{E}.d\vec{s}_2}_{\text{قاعده بالا}} + \underbrace{\int \vec{E}.d\vec{s}_3}_{\text{قاعده پائين}}$$

$$\underbrace{\int \vec{E}.d\vec{s}}_{\text{سطح جانبي}} = E\int d\vec{s}_1 = E2\pi rL$$

چون مقدار Eدر فاصله r (روي سطح جانبي) از منبع مقداري ثابت و در جهت $\hat{a}_r$ است (عمود بر منبع) و $d\vec{s} = d\vec{s}_r$

$$\int_{\text{قاعده بالا}} \vec{E}.d\vec{s}_2 = \int E\hat{a}_r.d\vec{s}_z = 0$$

$$\int_{\text{قاعده پائين}} \vec{E}.d\vec{s}_3 = \int E\hat{a}_r.(-d\vec{s}_z) = 0$$

بنابراين

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = E2\pi rL$$

اما:

$$\int_v \rho dv' \equiv \int_c \rho_l dl' = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_l dz' = \rho_L L$$

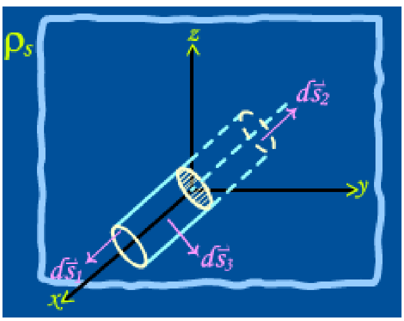
در نتيجه:

$$E2\pi rL = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_l L) \Rightarrow E = \frac{\rho_l}{2\pi r\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{a}_r$$

كه دقيقاً مشابه جواب مثال قبلي است كه از روش كلي حل شد.

مثال: مطلوبست تعيين شدت ميدان الكتريكي در نقاط مختلف در مقابل يك بار سطحي نامحدود به چگالي بار $\rho_s \; {}^{c}\!/\!_{m^2}$



انتخاب سطح گاوسي: هر شكل فضائي كه توسط صفحه باردار به دو قسمت تقسيم گرديده و بر صفحه باردار عمود باشد از جمله يك استوانه يا يك مكعب مستطيل استوانه‌اي بطول L، محور استوانه محور xها و سطح قاعده آن A فرض شود.

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{s} = \int_{\text{قاعده روبرو}} \vec{E}.d\vec{s}_1 + \int_{\text{قاعده پشت}} \vec{E}.d\vec{s}_2 + \int_{\text{جانبي}} \vec{E}.d\vec{s}_3$$

$$\int_{\text{روبرو}} \vec{E}.d\vec{s} = \int_{x=\frac{L}{2}} \vec{E}_x.d\vec{s}_x = E\int ds_x = E\Big|_{x=\frac{L}{2}} \times A$$

$$\int_{\text{پشت}} \vec{E}.d\vec{s}_2 = \int -\vec{E}_x.(-d\vec{s}_x) = E\int ds_x = E\Big|_{x=\frac{L}{2}} \times A$$

$$\int_{\text{جانبي}} \vec{E}.d\vec{s}_3 = 0$$

بنابراين

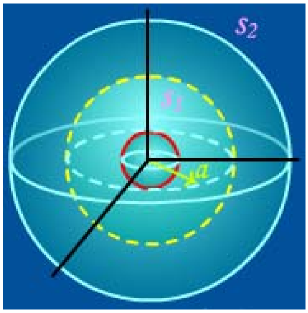
$$\oint \vec{E}.d\vec{s} = EA + EA = 2EA$$

اما:
$$Q_{total}=\int \rho_s ds'=\rho_s A$$

پس:
$$2EA=\frac{\rho_s A}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_x$$

مثال: در فضاي آزاد بار پيوسته‌اي تا شعاع a به چگالي $\rho=\frac{\rho_0 R^2}{a^2}\ {c}/{m^3}$ موجود است شدت ميدان الكتريكي در هر نقطه را حساب كنيد.

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv'$$



سطح گاوسي: كره به مركز مبدأ و به شعاع R

$$I: \qquad R<a$$
$$II: \qquad R>a$$

براي R<a:
$$\oint_{s_1}\vec{E}_1.d\vec{s}_1=E_1\int_{s_1}ds_R=E_1 4\pi R^2$$

$$Q=\int \rho dv'=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\rho_0 R'^2}{a^2}R'^2\sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$

$$Q=\frac{\rho_0 R^5}{5a^2}4\pi$$

بنابراين:
$$E4\pi R^2=\frac{\rho_0 R^5}{5\varepsilon_0 a^2}4\pi$$

$$\overline{E}=\frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 a^2}\hat{a}_R$$

براي R>a:

$$\oint_{s_2}\overline{E}_2.d\overline{s}_2=E_2\int_{s_2}ds_R=E_2 4\pi R^2$$

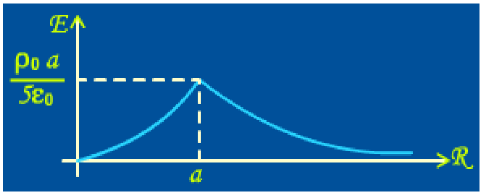
$$Q=\int \rho dv'=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{\rho_0 R'^2}{a^2}R'^2\sin\theta' dR' d\theta' d\varphi'$$

$$=\frac{4\pi\rho_0 a^3}{5}$$

بنابراين :

$$E4\pi R^2=\frac{4\pi\rho_0 a^3}{5\varepsilon_0}$$

$$\overline{E}=\frac{\rho_0 a^3}{5\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$



شكل ديفرانسيلي قانون گاوس (معادله اول ماكسول)

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dv'$$

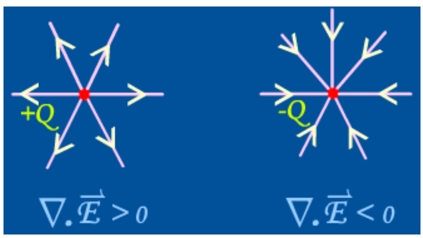
طبق قضيه گاوس

$$\int_v \nabla.\vec{E}dv' = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dv'$$

$$\int \nabla.\vec{E}dv' = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0}dv' \Rightarrow \int_v \nabla.\vec{E}dv' - \int_v \frac{\rho}{\varepsilon_0}dv' = 0$$

$$\int_v \left(\nabla.\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)dv' = 0 \Rightarrow \nabla.\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

نتيجه: چون ديورژانس با فلوي خروجي از واحد حجم متناسب است بنابراين اگر $\nabla.\vec{E}$ مثبت شود يعني ρ مثبت و يا به عبارتي خطوط ميدان الكتريكي از روي بار مثبت شروع مي‌شوند و بر عكس اين خطوط روي بار منفي ختم مي‌گردند.



مثال: بار پيوسته‌اي كه در فضاي آزاد ميدان الكتريكي با شدت $\vec{E}$ ايجاد مي‌كند را بدست آوريد:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\hat{a}_R \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R & 0 \le R \le b \\ -\hat{a}_R \dfrac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2} & R > b \end{cases}$$

$$\nabla.\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \nabla.\vec{E}$$

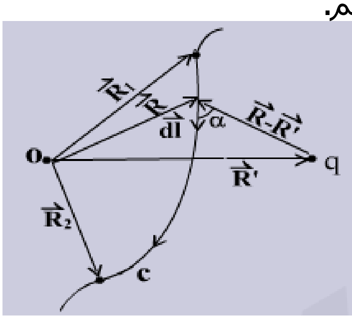
$$0 \le R \le b \quad \Rightarrow \quad \rho = \varepsilon_0 \nabla.\left[-\hat{a}_R \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R\right] = \varepsilon_0 \times \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left[R^2\left(-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R\right)\right] = -\rho_0$$

$$R > b \quad \Rightarrow \quad \rho = \varepsilon_0 \nabla.\left[-\hat{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^2}\right] = \varepsilon_0 \times \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left[R^2\left(\frac{\rho_0 b^3}{3\varepsilon_0 R^3}\right)\right] = 0$$

تابع پتانسيل الكتريكي Electric potential

مي‌دانيم كه شدت ميدان الكتريكي با نيروي وارد بر يك بار الكتريكي كه در آن ميدان قرار مي‌گيرد رابطه دارد پتانسيل الكتريكي با ميزان انرژي لازم براي آنكه يك بار الكتريكي از نقطه‌اي به نقطه ديگر حركت كند رابطه دارد.

بنابراين اگر بار نقطه‌اي q را كه در نقطه R' واقع است و توليد يك ميدان در همه فضاي خالي مي‌كند در نظر بگيريم، مقدار انرژي لازم براي حركت دادن يك بار q_t از نقطه $\vec{R}_1$ به نقطه $\vec{R}_2$ روي مسير c را مي‌خواهيم محاسبه كنيم.



$$\vec{F}_{q_t} = \frac{qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

نيروي لازم براي حركت q_t $\vec{F} = -\vec{F}_{q_t}$

$$W = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2}\vec{F}.\vec{dl} = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2}\frac{-qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{\left|R-R'\right|^3}.d\vec{l}$$

$$\left(\vec{R}-\vec{R}'\right).d\vec{l} = \left|\vec{R}-\vec{R}'\right| dl\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{d\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}{dl}$$

بنابراين:

$$W = -\frac{qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2}\frac{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right| d\left(\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|\right)}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3} = \frac{-qq_t}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2}\frac{d\left(\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|\right)}{\left|R-R'\right|^2}$$

$$W = q_t\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}_2-\vec{R}'\right|} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}_1-\vec{R}'\right|}\right]$$

پس W بستگي به مسير c ندارد و تنها تابع نقاط ابتدائي و انتهائي است.

$$W = q_t\left[v\left(\vec{R}_2\right) - v\left(\vec{R}_1\right)\right] = q_t\Delta V$$

بنابراين انرژي لازم براي تغيير مكان q_t از نقطه اي به نقطه ديگر با حاصلضرب اختلاف پتانسيل دو نقطه فوق در بار q_t مساويست.

$$V(\vec{R}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$$

پتانسيل نقطه $\vec{R}$ به دليل وجود بار الكتريكي q در نقطه $\vec{R}'$ واحد J/C يا Volt

براي N بار الكتريكي نقطه اي

$$V(\vec{R})=\sum_{i=1}^{N}\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$$

براي يك بار پيوسته

$$V(\vec{R})=\int_v\frac{\rho(\vec{R}')dv'}{4\pi\varepsilon_\circ\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$$

مثال: اگر بار نقطه اي 10^{-7} كولمبي در (۳و۲و۱) واقع باشد ، تابع پتانسيل را در هر نقطه در فضاي خالي به دست آوريد.

$$\vec{R}=\hat{a}_x x+\hat{a}_y y+\vec{a}_z z$$

$$\vec{R}=\hat{a}_x+\hat{a}_y 2+\vec{a}_z 3$$

$$\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

$$V(\vec{R})=V(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}=\frac{900}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}}$$

مثال: با پيوسته با چگالي $10^{-7}R\ {c}/{m^3}$ از مبداء مختصات تا شعاع ۱ متر قرار دارد پتانسيل را در مركز مختصات به دست آوريد.

$$\vec{R}=0$$

$$\vec{R}'=\hat{a}_R R' \qquad\qquad V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{\rho(\vec{R}')dv'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$$

$$\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|=R'$$

$$V(0,0,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_0^1\frac{10^{-7}R'}{R'}4\pi R'^2dR'=1200\pi$$

- ديدگاهي ديگر

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right)=\frac{q\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}$$

$$V\left(\vec{R}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$$

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}\right)=-\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^2}\equiv\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

بنابراين:

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right)=-\nabla V\left(\vec{R}\right)$$

*بنابراين تا كنون سه روش براي محاسبه $\vec{E}$ قابل دسترس است.

۱ – استفاده از فرمول كلي (بر پايه قانون كولمب)

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v\frac{\rho\left(\vec{R}'\right)dv'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|^3}\left(\vec{R}-\vec{R}'\right)$$

۲ – استفاده از قانون گاوس

$$\oint_s\vec{E}.d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_v\rho dv'$$

۳ – استفاده از رابطه $\vec{E}=-\nabla V$ با محاسبه V از رابطه

$$V\left(\vec{R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho dv'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$$

- شكل انتگرالي رابطه $\vec{E}=-\nabla V$ عبارتست از:

$$V(P_2)-V(P_1)=-\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}.d\vec{l}$$

-قانون (معادله) دوم ماكسول در ميدان ساكن

چون:

$$\nabla\times(-\nabla V)=-\nabla\times(\nabla V)=0$$

بنابراين :

$$\nabla\times\vec{E}=0$$

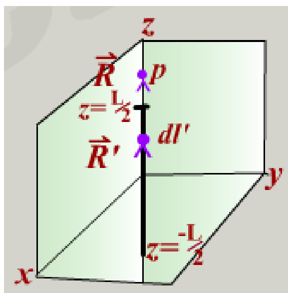
و شكل انتگرالي آن:

$$\int_s\nabla\times\vec{E}.d\vec{s}=\oint_c\vec{E}.d\vec{l}=0$$

بعبارتي چنانچه بار الكتريكي در يك ميدان الكتريكي ساكن در يك مسير بسته گردش نمايد (نقطه شروع و اتمام انتگرال‌گيري يكي باشد) هيچگونه انرژي از ميدان كسب و هيچگونه انرژي به ميدان داده نمي‌شود يعني انرژي ذخيره شده ثابت است و ميدانهاي فوق را كنزرواتيو (Conservation) يا پايستار گويند.

- بنابراين كرل و ديورژانس ميدان الكتريكي ساكن محاسبه گرديد و در نتيجه اين ميدان طبق قضيه هلمهولتس كاملاً مشخص شده است.

مثال: منبع بار خطي به طول L بر روي محور zها با چگالي يكنواخت ρ_l در دست است. مطلوبست محاسبه شدت ميدان الكتريكي و تابع پتانسيل الكتريكي نقاط مستقر در امتداد اين بار خطي:



$$P\left|\begin{array}{l} r=0\\ \varphi=0\\ z=z\end{array}\right.$$

$$\vec{R}=z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}'=z'\hat{a}_z$$

$$\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|=(z-z')\qquad z>L/2$$

$$dl'=dz'$$

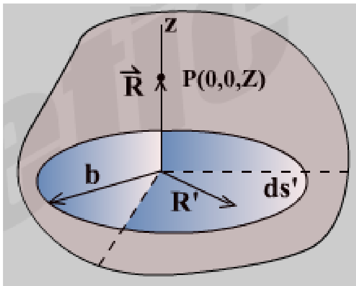
$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\rho_l dz'}{(z-z')}\quad\Rightarrow$$

$$V(\vec{R})=-\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln(z-z')\Big]_{-L/2}^{L/2}$$

$$V=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{z+(L/2)}{z-(L/2)}\right]\qquad |z|>L/2$$

$$\vec{E}=-\nabla V=-\hat{a}_z\frac{dv}{dz}=\hat{a}_z\frac{\rho_l L}{4\pi\varepsilon_0\left[z^2-(L/2)^2\right]}\qquad z>L/2$$

مثال: مطلوبست محاسبه شدت ميدان الكتريكي بر روي محور يك ديسك دايره‌اي با شعاع b كه بار يكنواخت سطحي به چگالي ρ_s روي آن توزيع شده است.



$$\vec{R} = z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}' = r'\hat{a}_r$$

$$\left|\vec{R} - R'\right| = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

$$ds' = r'dr'd\varphi'$$

$$V\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\rho_s ds'}{\left|\vec{R} - \vec{R}'\right|} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{r'dr'd\varphi'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

$$V\left(\vec{R}'\right) = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi\sqrt{z^2 + r'^2}\Big]_0^b = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\left(z^2 + b^2\right)^{1/2} - |z|\right]$$

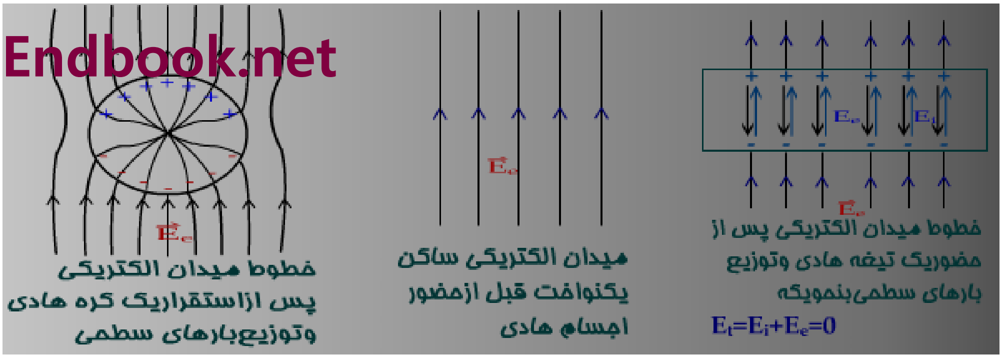
$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_z \frac{dv}{dz} = \begin{cases} \hat{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 - z\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\right] & z > 0 \\ -\hat{a}_z \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 + z\left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\right] & z < 0 \end{cases}$$

حضور هادي‌ها در ميدان الكتريكي ساكن

چنانچه يك جسم هادي را در نظر بگيريم، روشن است كه هيچ اختلاف پتانسيلي بين كليه نقاط آن وجود ندارد و هادي در يك سطح پتانسيل ثابت قرار دارد بنابراين با توجه به $\vec{E} = -\nabla V$ شدت ميدان در جسم هادي صفر خواهد بود.

از طرفي چنانچه در جسم هادي شدت ميدان الكتريكي غير صفري وجود داشته باشد، اين ميدان سبب اعمال نيرو به بارهاي الكتريكي (الكترونها) موجود در هادي كرده و در نتيجه تجمع بارهاي همنام منفي در يك طرف و بارهاي مثبت در طرف ديگر شده يعني ايجاد اختلاف پتانسيل بين اين دو مكان از هادي مي‌گردد كه خلاف واقع است بنابراين $\vec{E}$ در داخل اجسام هادي صفر خواهد بود.

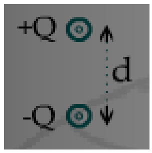
چنانچه يك هادي در يك ميدان الكتريكي خارجي قرار گيرد سبب تغيير توزيع بارهاي موجود در داخل هادي مي‌شود و اگر اين هادي خنثي باشد، توزيع جديد بارها به نحوي خواهد بود كه ميدان بوجود آمده از اين توزيع جديد ميداني بوجود مي‌آورند كه دقيقاً برابر با ميدان خارجي اما در خلاف جهت با آن باشند به نحوي كه $\vec{E}$ كل در داخل هادي صفر شود توزيع بارها بر روي سطوح هادي بطريقي خواهد شد تا خطوط ميدان در جهت عمود بر اين سطوح قرار گيرند چه در غير اينصورت ايجاد مؤلفه مماسي كرده و همين امر نشان دهنده وجود ميدان غير صفر در هادي (سطح هادي) مي‌شود كه غير ممكن است.



دو قطبي الكتريكي Electric Dipole

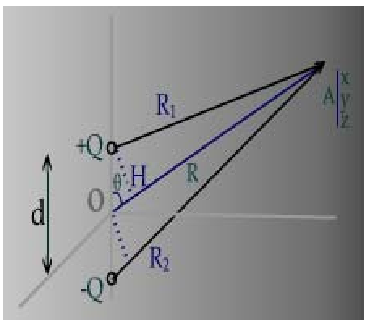
تركيبي از دو بار الكتريكي مساوي و غير همنام كه بفاصله مشخصي از هم قرار گرفته‌اند.

بعنوان مثال: دو بار Q+ و Q- بفاصله d



محاسبه تابع پتانسيل الكتريكي يك دو قطبي

در اين قسمت پتانسيل ناشي از يك دو قطبي الكتريكي در ناحيه دور (Far zone) را بدست مي‌آوريم و با استفاده از رابطه $\vec{E}=-\nabla V$ شدت ميدان الكتريكي آن (Far Field) را محاسبه خواهيم كرد.



يك دو قطبي واقع در مبدأ مختصات را در نظر بگيريد.

محاسبه پتانسيل نقطه‌اي كلي مانند $A\left|\begin{array}{l} R \\ \theta \\ \varphi \end{array}\right.$

$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{q_i}{|R-R_i|}$$

$$V(\vec{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{+Q}{R_1}+\frac{-Q}{R_2}\right]$$

ناحيه دور $\quad R_1, R_2, R >> d \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{R^2}\to 0$

$$R_1 \approx R-OH$$

$$OH=\frac{d}{2}\cos\theta$$

$$R_1 \approx R - \frac{d}{2}\cos\theta$$

$$R_2 \approx R + \frac{d}{2}\cos\theta$$

همچنين:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{-1}{R_2}\right] \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R - \frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2}\cos\theta}\right]$$

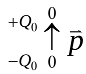
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{R + \frac{d}{2}\cos\theta - R + \frac{d}{2}\cos\theta}{R^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta}\right] = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2\left[1 - \frac{d^2}{4R^2}\cos^2\theta\right]}$$

$$V(\vec{R}) \approx \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}$$

$\vec{P}$ گشتاور دو خطي الكتريكي Electric Dipole moment جهت بردار $\vec{P}$ از بار منفي بطرف بار مثبت است (يعني برعكس جهت $\vec{E}$)

$$P = Qd \quad , \quad \hat{a}_p = \hat{a}_z$$

$$V(\vec{R}) = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$



از طرفي مي‌دانيم :

$$\hat{a}_z . \hat{a}_R = \cos\theta$$

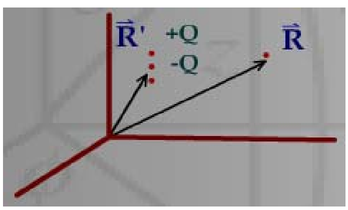
بنابراين:

$$P\cos\theta = P\hat{a}_z . \hat{a}_R = \vec{P}.\hat{a}_R = \vec{P}.\frac{\vec{R}}{R}$$

در نتيجه:

$$V(\vec{R}) = \frac{\vec{P}.\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

چنانچه دو قطبي در موقعيت $\vec{R}'$ واقع شده باشد و نه در مبدأ مختصات



$$V(\vec{R}) = \frac{\vec{P}.(\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

- ميدان الكتريكي يك دو قطبي

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\hat{a}_R \frac{dV}{dR} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R}\frac{dV}{d\theta}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{P\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_R + \frac{P\sin\theta}{4\lambda\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_\theta$$

و يا

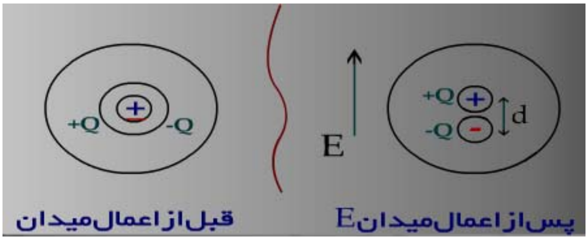
$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{\vec{P}.\hat{a}_R}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_R - \frac{\vec{P}.\hat{a}_\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{a}_\theta$$

حضور عايق‌ها در ميدان الكتريكي ساكن و پلاريزاسيون

در اثر اعمال يك ميدان الكتريكي به اتم يا مولكول يك جسم عايق، مركز بارهاي مثبت و مركز بارهاي منفي كه قبل از آن بر روي هم قرار داشته‌اند، جابه‌جا مي‌شوند.

اين جابجا شدن با فرض اينكه ساختار فوق خنثي است بصورت يك دو قطبي نمود خواهد كرد +Q (كل بار مثبت) و −Q (كل بار منفي) كه فاصله d از هم قرار مي‌گيرند.

شدت $\vec{E}$ به اندازه‌اي نيست كه بارهاي منفي كه در قيد ساختار هستند از آن رها شدند.



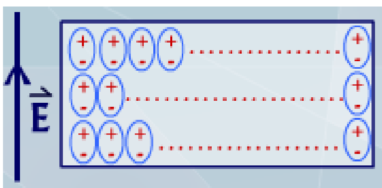
دو نيرو بر هسته (+Q) وارد مي‌شود F_{-Q} ناشي از بارهاي منفي (-Q) و F_E ناشي از ميدان $\vec{E}$ كه چون هسته در حال تعادل است بايستي نيروهاي فوق به تعادل برسند يعني:

$$\vec{F}_{-Q} + \vec{F}_E = 0$$

$$F_{-Q} = F_E \quad \Rightarrow \quad Qd = \varepsilon_0 XeE \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \varepsilon_0 Xe\vec{E}$$

Xe ضريب تأثيرپذيري يا حساسيت الكتريكي عايق ناميده مي‌شود. (Susceptibility)

چنانچه يك قطعه عايق كه متشكل از تعداد زيادي اتم يا مولكول آن عايق خواهد بود را در نظر بگيريم كه در يك ميدان الكتريكي خارجي قرار بگيرد، قطب‌بندي و يا اصطلاحاً پلاريزاسيون اتفاق و يا بعبارتي نظم خاصي در ساختار اتمي يا مولكولي عايق بوجود مي‌آيد كه ايجاد ممان دو قطبي در آن خواهد كرد.



- چون $\vec{E}$ آنچنان زياد نيست كه الكترونها از قيد هسته جدا شوند، تغيير شكل (deform) در عايق رخ نخواهد داد و بارها مقيد به ساختار خواهند بود و بهمين دليل آنها را بارهاي مقيد Bound charge يا بارهاي پلاريزه گويند.
- با قطب‌بندي بارهاي مقيد، توليد ميدان الكتريكي مي‌شود در خلاف جهت $\vec{P}$ يا $\vec{E}$ كه سبب خواهد شد شدت ميدان كل از مقدار اوليه كاهش يابد.

$$\overset{\vec{P}\,+}{\uparrow}_{-} \downarrow \vec{E}_P \uparrow \vec{E}$$

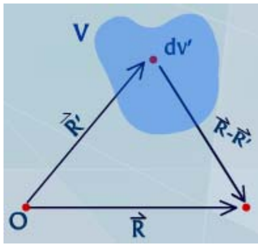
$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_p + \vec{E}$$

$$E_{total} = E - E_P < E$$

و اين دليل عمده در بكارگيري عايق‌ها در مواجهه با ميدان‌هاي قوي (ولتاژ زياد) مي‌باشد.

- محاسبه پتانسيل و شدت ميدان الكتريكي بعلت عايق‌هاي پلاريزه

$\vec{P}$ = ممان در واحد حجم عايق



$$dV(\vec{R}) = \frac{\vec{P}(\vec{R}')dV'.(\vec{R}-\vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}-\vec{R}'|^3}$$

$$V(\vec{R}) = \int_V \frac{P(\vec{R}').(\vec{R}-\vec{R}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}-\vec{R}'|^3}dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \left\{\nabla'.\left[\frac{\vec{P}}{|\vec{R}-\vec{R}'|}\right] - \frac{\nabla'.\vec{P}}{|\vec{R}-\vec{R}'|}\right\}d\dot{V}$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}.d\vec{s}'}{|\vec{R}-\vec{R}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-\nabla'.\vec{P}}{|\vec{R}-\vec{R}'|}dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}.\hat{n}ds'}{|\vec{R}-\vec{R}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-\nabla'.\vec{P}}{|\vec{R}-\vec{R}'|}dV'$$

پتانسيل ناشي توزيع بارهاي حجمي و سطحي آزاد: $V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}_s ds'}{|\vec{R}-\vec{R}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{P dv'}{|\vec{R}-\vec{R}'|}$

چگالي بار مفيد (پلاريزه) سطحي در سطح عايق پلاريزه: $\rho_{P_S} = \vec{P}.\hat{n}$

چگالي بار مفيد (پلاريزه) حجمي در حجم عايق پلاريزه: $\rho_P = -\nabla.\vec{P}$

بنابراين: $V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\rho_s+\rho_{P_S}}{|\vec{R}-\vec{R}'|}ds' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho+\rho_P}{|\vec{R}-\vec{R}'|}dV'$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{(\rho_s+\rho_{P_S})(\vec{R}-\vec{R})}{|\vec{R}-\vec{R}'|^3}ds' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(\rho+\rho_P)(\vec{R}-\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|^3}dV'$$

چگالي فلوي ميدان الكتريكي

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V(\rho+\rho_P)dv'$$

$$\nabla.\vec{E} = \frac{\rho+\rho_P}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla.(\varepsilon_0\vec{E}) = \rho - \nabla.\vec{P}$$

$$\nabla.(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}) = \rho$$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ *Electric Flux Density*

$\nabla.\vec{D} = \rho$ يا $\oint_S \vec{D}.d\vec{s} = Q_{free} = \int_V \rho dv'$

اما مي‌دانيم كه $\vec{P} = \varepsilon_0 Xe\vec{E}$

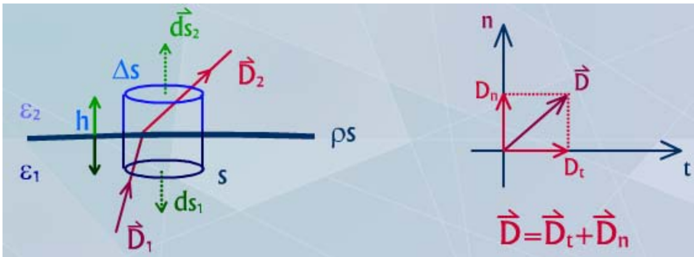
$$\Rightarrow \qquad \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0 Xe\vec{E}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0(1 \quad Xe)\vec{E} \qquad\qquad \vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

$\varepsilon=\varepsilon_0(1+Xe)$ *Absolute Electric Permitivity* ε= ضريب نفوذپذيري مطلق عايق

$\varepsilon_r=1+Xe$ Re*lativeElectricPermitivity* ε_r= ضريب نفوذپذيري نسبي عايق

شرايط مرزي در سطح مشترك دو محيط Boundary condition



$$\oint_s \vec{D}.d\vec{s}=Q$$

$$\oint_s \vec{D}.d\vec{s}=\int_{s_1}\vec{D}.d\vec{s}_1+\int_{s_2}\vec{D}_2.d\vec{s}_2+\int_{\text{جانبي}}\vec{D}.d\vec{s}$$

$$\int_{s_1}\vec{D}_1.d\vec{s}_1=\int_{s_1}\left(\vec{D}_{1t}+\vec{D}_{1n}\right)d\vec{s}_1=\int_{s_1}\vec{D}_{1t}.d\vec{s}_1+\int_{s_1}\vec{D}_{1n}.d\vec{s}_1=0+D_{1n}(-\Delta s)=-D_{1n}\Delta S$$

$$\int_{s_2}\vec{D}_2.d\vec{s}_2=\int_{s_2}\left(\vec{D}_{2t}+\vec{D}_{2n}\right)d\vec{s}_2=0+D_{2n}(\Delta S)=D_{2n}\Delta S$$

$$\int_{\text{جانبي}}\vec{D}.d\vec{s}\underset{h\to 0}{=}0$$

$$\Rightarrow \qquad \oint_s \vec{D}.d\vec{s}=D_{2n}\Delta s-D_{1n}\Delta S$$

چون عايق‌ها كامل فرض شده‌اند:

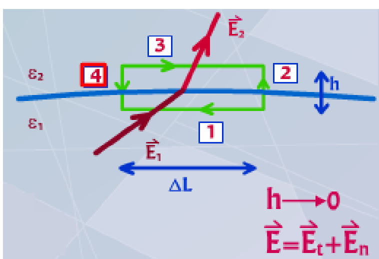
$$Q=\int_V \rho dv'=\int_S \rho_s ds'=\rho_s\Delta S$$

$$(D_{2n}-D_{1n})\Delta S=\rho_s\Delta S\Rightarrow D_{2n}-D_{1n}=\rho_s$$

$$if \qquad \rho_s=0\Rightarrow D_{2n}=D_{1n}$$

$$\varepsilon_2E_{2n}=\varepsilon_1E_{1n}$$

$$\nabla.\vec{P}=-\rho_P \qquad \Rightarrow \qquad P_{1n}-P_{2n}=\rho_{ps}$$



$$\nabla\times\vec{E}=0$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l}=0$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l}=\int_{(1)}\vec{E}_1.d\vec{l}_1+\int_{(2)}\vec{E}.d\vec{l}_2+\int_{(3)}\vec{E}_2.d\vec{l}_3+\int_{(4)}\vec{E}.d\vec{l}_4$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = \int_{(1)} \vec{E}_1.d\vec{l}_1 + \int_{(2)} \vec{E}.d\vec{l}_2 + \int_{(3)} \vec{E}_2.d\vec{l}_3 + \int_{(4)} \vec{E}.d\vec{l}_4$$

$$= E_{1t}\Delta L + 0 + E_{2t}(-\Delta L) + 0 = (E_{1t} - E_{2t})\Delta L = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

چنانچه يكي از محيطها هادي باشد با توجه به آنكه در هادي $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$ صفر است.

(مثلاً محيط اول هادي است)

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \qquad E_1 = D_1 = P_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad D_{2n} = \rho_s$$

$$E_{2n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_2}$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 0$$

يعني در مرز هادي‌ها تنها مؤلفه عمود وجود دارد.

مثال: بار نقطه‌اي Q+ در مركز يك پوسته هادي كروي با شعاع داخلي R_i و شعاع بيروني $R_\circ$ قرار دارد توابع $\vec{E}$ و V را بر حسب فاصله R بدست آوريد (محيط مسئله فضاي آزاد)

- براي ناحيه $R>R_\circ$

سطح گاوسي كروي با شعاع R:

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q_t}{\varepsilon_\circ}$$

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{s} = E_1 4\pi R^2$$

با فرض آنكه پوسته هادي خنثي باشد:

$$Q_t = \int \rho dv = Q$$

$$E_1 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$V = -\int \vec{E}.d\vec{l}$$

$$V_1(\vec{R}) - V(\infty) = -\int_\infty^R \vec{E}_1.d\vec{l} = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R dR'$$

با فرض $V(\infty) = 0$:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'}\Bigg]_\infty^R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- براي ناحيه $R_i<R<R_\circ$ چون در جسم هادي قرار داريم:

$$E_2 = 0$$

$$V_2 = V_1\Big|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$$

- براي ناحيه $R<R_i$ سطح گاوسي كروي با شعاع R:

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = E_3 4\pi R^2$$

$$Q_t = Q$$

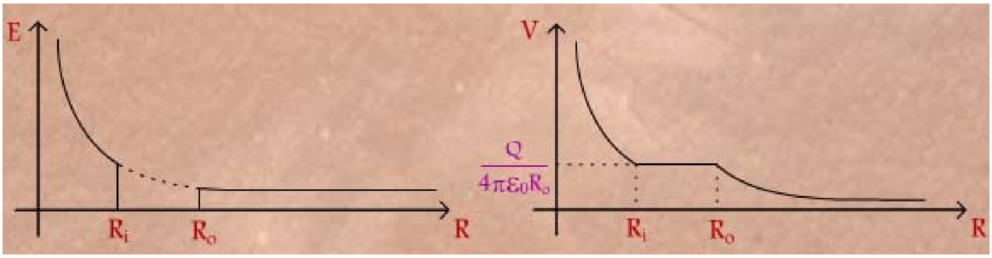
بنابراین

$$E_3 = 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$V_3 = -\int_{\infty}^{R}\vec{E}.d\vec{l} = -\int_{\infty}^{R_0}\vec{E}_1.d\vec{l} - \int_{R_i}^{R}\vec{E}_3.d\vec{l}$$

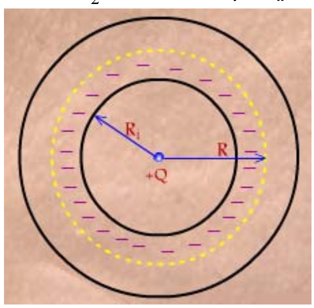
$$V_3 = V_2 - \int_{R_i}^{R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}dR' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'}\right)\Bigg]_{R_i}^{R}$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$



مثال: براي مثال قبل مطلوبست تعيين بارهاي توزيع شده در نقاط مختلف پوسته هادي.

با توجه به خنثي بودن هادي و با عنايت به آنكه $E_2 = 0$:



$$\oint \overline{E}_2.d\overline{s} = \frac{Q_t}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_t = 0 \Rightarrow Q + Q_s = 0$$

$$\Rightarrow Q_s = -Q \Rightarrow \rho_s\Big|_{R=R_i} = -\frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

دیدگاه دیگر:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$ در $R = R_i$

$$0 - D_1 = P_s \Rightarrow -\varepsilon_0 E_1\Big|_{R=R_i} = \rho_s$$

$$-\frac{Q}{4\pi R_i^2} = \rho_s$$

$$\Rightarrow \rho_s = -\frac{Q}{4\pi R_i^{\,2}}$$

بنابراین

$$Q_s\Big|_{R=R_0} = -Q_s\Big|_{R=R_i} = Q$$

$$\rho_s\Big|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$$

و يا :

$$D_3\Big|_{\;0} \quad \Big|_{\;0} \quad \frac{Q}{4\pi R_0^2}-0=\rho_s$$

مثال: چنانچه پوسته كروي مثال قبل از جنس عايق با ثابت عايقي ε_r باشد مطلوبست محاسبه $V,\vec{P},\vec{D},\vec{E}$ برحسب فاصله R و نيز تعيين چگالي بارهاي پلاريزه.

$R > R_0$:

$$\oint \vec{D}_1.d\vec{s}_1 = Q_t \Rightarrow D_1 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \vec{D}_1 \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{p}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_1\vec{E}_1 - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} - \varepsilon_0\vec{E} = 0$$

$$V_1(R) - V(\infty) = -\int_\infty^R \vec{E}_1.d\vec{l} = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'}\Bigg]_\infty^R$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$R_i < R < R_0$:

$$\oint \overline{D}_2.d\vec{s}_2 = Q_t \Rightarrow D_2 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{P}_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_2 = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r R^2}\hat{a}_R$$

$$V_2 = -\int_\infty^R \vec{E}.d\vec{l} = -\int_\infty^{R_0}\vec{E}_1.d\vec{l} - \int_{R_0}^R \vec{E}_2.d\vec{l}$$

$$V_2 = V_1(R=R_0) - \int_{R_0}^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon R'^2}dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_0}$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \frac{Q}{4\pi R_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$R < R_i$:

$$\oint \vec{D}_3.d\vec{s}_3 = Q_t \Rightarrow \vec{D}_3 = \frac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\overleftarrow{D}_3}{\varepsilon_3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R$$

$$\vec{P}_3 = 0$$

$$V_3 = -\int_\infty^R \vec{E}.d\vec{l} = -\int_\infty^{R_i}\vec{E}.d\vec{l} - \int_{R_i}^R \vec{E}_3.d\vec{l}$$

$$V_3 = V_2(R=R_i) - \int_{R_i}^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}dR'$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_i} + \frac{Q}{4\pi R_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$

براي محاسبه چگالي بار حجمي پلاريزه در فاصله $R_i<R<R_\circ$:

ρ_p $\vec{P}_2$

$$\rho_P=-\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2P_2\right)=-\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(\frac{Q(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r}\right)=0$$

$$\rho_P\Big|_{R=R_0}=\left(\vec{P}.\hat{n}\right)\Big|_{R=R_0}=\vec{p}_2\Big|_{R=R_0}.\hat{a}_R=\frac{Q(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r R_0^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R$$

$$\rho_P\Big|_{R=R_0}=\frac{Q(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r R_0^2}$$

$$\rho_p\Big|_{R=R_i}=\vec{P}_2\Big|_{R=R_I}.\hat{n}\Big|_{R=R_i}=\frac{Q(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r R_i^2}\hat{a}_R.(-\hat{a}_R)=-\frac{Q(\varepsilon_r-1)}{4\pi\varepsilon_r R_i^{2}}$$

نكته: قدرت تحمل عايق (ماده) را حداكثر شدت ميدان الكتريكي اعمالي به عايق بدون آنكه شكست (Breakdown) در مورد عايق رخ ندهد و بعبارتي تغيير شكل (ساختار) مولكولي انجام نگيرد. معمولاً اين پارامتر را با واحد v/m بيان مي‌گردد و مفهوم آن بصورت حداكثر ولتاژ قابل اعمال به قطعه‌اي با ضخامت مشخص بكار مي‌رود.

مثلاً قدرت تحمل عايقي هوا (با فشار اتمسفر) $3\times10^6\ v/m$ است و يا براي ميكا Mica با $\varepsilon_r=6$ برابر $200\times10^6\ v/m$ يا $200\ Mv/m$ است، بدين مفهوم كه براي يك قطعه از جنس ميكا با ضخامت ۱cm حداكثر $V_{\max}=E_{\max}\times d=200\times10^6\times10^{-2}=2MV$

۲ مگاولت قابل اعمال به قطعه خواهد بود بدون صدمه رسيدن به آن.

خازن Capacitor

قطعاتي هستند كه به مجرد آنكه به ولتاژي (منبعي) متصل شوند (دو جسم هادي كه در بين آنها محيط عايقي قرار گرفته) بارهائي روي سطوح اين دو جسم جمع مي‌شود – بار مثبت روي يكي و بار منفي به همان مقدار روي ديگري. اين قطعه انرژي ميدان الكتريكي را در خود ذخيره مي‌كند. نسبت بار ذخيره شده به اختلاف پتانسيل بين دو جسم هادي آن مقداري است ثابت كه به آن ظرفيت گويند (capacitance). اين ظرفيت تنها تابع مشخصات فيزيكي قطعه است و نه كميت‌هاي الكتريكي مربوطه. مانند يك خازن مسطح با سطح هادي برابر با A كه بفاصله d از هم قرار گرفته‌اند و فضاي بين آنها از عايقي با ضريب گذردهي ε پر شده و $c=\frac{\varepsilon A}{d}$ مي‌باشد.

$$C=\frac{Q}{V}\qquad\qquad C=\frac{\oint\vec{D}.d\vec{s}}{-\int\vec{E}.d\vec{l}}=\frac{\int\varepsilon\vec{E}.d\vec{s}}{-\int\vec{E}.d\vec{l}}$$

نحوه محاسبه ظرفيت خازني

۱ – فرض استقرار بار Q+ و Q− مشخص روي دو هادي خازن

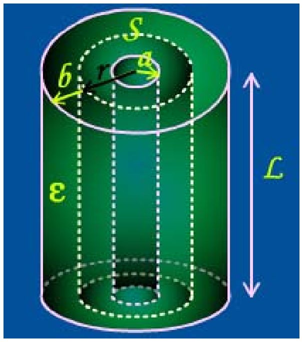
۲ – تعيين D در فضاي بين دو هادي از طريق $\oint \vec{D}.d\vec{s} = Q$

۳ – محاسبه E از طريق $E = \dfrac{D}{\varepsilon}$

٤ – محاسبه Vبين دو هادي از طريق $V = -\int \vec{E}.d\vec{l}$

٥ – جايگزيني V بدست آمده در فرمول $C = \dfrac{Q}{V}$

مثال: محاسبه ظرفيت خازني يك خازن استوانه‌اي متشكل از دو استوانه هم محور بطول L و به شعاع‌هاي قاعده a و b (b>a) كه فضاي بين آندو از عايقي (ε) پر شده است.



۱ – فرض بار Q+ روي استوانه داخلي و Q− روي استوانه بيروني

۲ – انتخاب سطح گاوسي استوانه‌اي به ارتفاع L و شعاع قاعده a<r<b

$$\oint_s \vec{D}.d\vec{s} = +Q \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{Q}{2\pi rL}\hat{a}_r$$

۳ -
$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rL}$$

٤ -
$$V_a - V_b = V = -\int_b^a \vec{E}.d\vec{l} = -\int_b^a \frac{Q\hat{a}_r}{2\pi\varepsilon\, rL}\hat{a}_r dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} Ln\frac{b}{a}$$

٥ -
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon L}Ln\dfrac{b}{a}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2\pi\varepsilon L}{Ln\dfrac{b}{a}}$$

مثال: محاسبه ظرفيت خازني كروي متشكل از دو كره هم مركز به شعاع‌هاي a و b كه فضاي بين دو كره از عايقي با پرميتيوته ε پر شده است.

۱) فرض بار مستقر روي كره داخلي Q+

۲) $\oint \vec{D}.d\vec{s} = Q \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \dfrac{Q}{4\pi R^2}\hat{a}_R$

۳) $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R$

٤) $V_a - V_b = -\displaystyle\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R.\hat{a}_R dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

٥) $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{Q}{\dfrac{Q(b-a)}{4\pi\varepsilon ab}} \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$

انرژي ذخيره شده الکترواستاتيکي

مي‌دانيم كه كار لازم براي حركت يك بار نقطه‌اي Q واقع در ميدان الكتريكي از رابطه W=QV كه V اختلاف پتانسيل بين نقطه (مكان) انتهائي و ابتدائي بار Q است بدست مي‌آيد اگر نقطه ابتدائي در بينهايت دور (يا مبدأ پتانسيل صفر در بينهايت) در نظر گرفته باشيم V پتانسيل نقطه نهائي بار Q خواهد بود اين ميزان كار مذكور بصورت انرژي در سيستم ذخيره مي‌شود.

حال N بار گسسته را كه در فضائي مستقر شده‌اند را در نظر مي‌گيريم، ميزان انرژي (كار) ذخيره شده براي استقرار اين بارها بقرار زير محاسبه مي‌شود.

ابتدا فرض مي‌شود كه هيچگونه باري وجود ندارد و بار q_1 را از بينهايت به مكان $\vec{R}_1$ آورده شود.

براي بار q_1 $\quad We_1 = 0$

براي بار q_2 $\quad We_2 = q_2 V_{21}$

براي بار q_3 $\quad We_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$

و نهايتاً براي آوردن بار q_N $\quad We_N = q_N V_{N1} + q_N V_{N2} + \ldots + q_N V_{N,N-1}$

بنابراين

$$We_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{N} We_i = 0 + q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32} + \ldots + q_N V_{N,N-1}$$

اما از طرفي

$$q_2 V_{21} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\left|\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right|} = q_1 V_{12}$$

و بطور كلي

$$q_i V_{ij} = q_j V_{ji}$$

بنابراين مي‌توان نوشت:

$$We_2 = q_1 V_{12}$$
$$We_3 = q_1 V_{13} + q_2 V_{23}$$
$$\ldots$$
$$We_N = q_1 V_{1N} + q_2 V_{2N} + \ldots + q_{N-1} V_{N-1,N}$$

و

$$We_{\text{کل}} = 0 + q_1 V_{12} + q_1 V_{13} + \ldots + q_{N-1} V_{N-1,N}$$

چنانچه We كل دو رابطه مربوطه در بالا را با هم جمع كنيم:

$$\begin{aligned} 2We = {} & q_1 V_{12} + q_2 V_{13} + q_1 V_{14} + \ldots + q_1 V_{1N} \\ & + q_2 V_{21} + q_2 V_{23} + q_1 V_{24} + \ldots + q_2 V_{2N} \\ & \ldots \\ & q_N V_{N1} + q_N V_{N2} + \ldots + q_N V_{N,N-1} \end{aligned}$$

يا :

$$\begin{aligned} 2We = {} & q_1 \left(V_{12} + V_{13} + \ldots + V_{1N} \right) \\ & + q_2 \left(V_{21} + V_{23} + \ldots + V_{2N} \right) \\ & \ldots \\ & + q_N \left(V_{N1} + V_{N2} + \ldots + V_{N-1} \right) \end{aligned}$$

حال اگر V۱ را بصورت $V_1=\sum_{i=2}^{N}V_{1i}$ تعريف كنيم كه مجموع پتانسيل نقطه $\vec{R}_1$ ناشي از تمام منابع $(q_N,\dots,q_3,q_2)$ است و بطور كلي:

$$V_K=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}V_{ki}$$ = پتانسيل نقطه kام ناشي از تمام بارهاي موجود به‌جز q_k

$$2We=q_1V_1+q_2V_2+\dots+q_NV_N$$

$$We=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iV_i$$

و براي يك توزيع بار پيوسته حجمي به چگالي P

$$We=\frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{R}')V(\vec{R}')dV'$$

مي‌توان ثابت كرد كه:

$$We=\frac{1}{2}\int_v \vec{D}.\vec{E}dv'$$

$$We=\frac{1}{2}\int \varepsilon E^2dv'=\frac{1}{2}\int\frac{D^2}{\varepsilon}dV'=\frac{1}{2}\int DEdv'$$

نيروي الكترواستاتيك

- براي يك سيستم بسته طبق اصل بقاء انرژي

$$\Delta W+\Delta We=0$$

$$\Delta W=-\Delta We$$

ميزان انرژي تغيير يافته بدليل اعمال نيروي F كه سبب جابجائي Δl مي‌شود:

$$\Delta W=F\Delta l$$

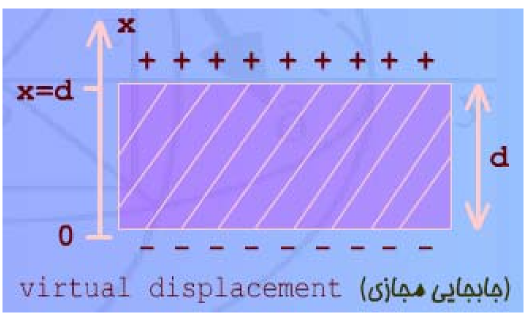
$$F=\frac{\Delta W}{\Delta l}$$

$$\Rightarrow\quad F=-\frac{\Delta We}{\Delta l}\quad\Rightarrow\quad \vec{F}\Big|_{Q=cte}=-\nabla We$$

مانند: يك خازن كه بار Q+ و Q− روي صفحات آن ذخيره شده و اتصالي با بيرون (يك منبع بيروني) ندارد يعني Q ثابت است و در نتيجه يك سيستم بسته را بوجود آورده بنابراين:

$$\vec{F}\Big|_{Q=cte}=-\nabla W_e\Big|_{Q=cte}=-\nabla(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C})$$

$$C=\varepsilon\frac{A}{x}$$



$dx=virtual\ \ displacement$ (جابجائي مجازي)

$$z \quad 0 \quad , \qquad \frac{}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{c}\right)=-\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2 x}{2\varepsilon A}\right)$$

$$F_x=-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon A}$$

- براي يك سيستم باز $\Delta W=\Delta We$

بنابراين

$$\Delta W=F\Delta l \quad \Rightarrow \quad F=\frac{\Delta W}{\Delta l}=\frac{\Delta We}{\Delta l}$$

$$\vec{F}\Big|_{V=cte}=\nabla W_e$$

مانند يك خازن كه به منبعي با ولتاژ ثابت V متصل گشته است و هز تغيير در انرژي موجود از منبع تأمين مي‌شود.

$$\vec{F}\Big|_{V=cte}=\nabla W_e=\nabla(\frac{1}{2}cV^2) \qquad C=\varepsilon\frac{A}{x}$$

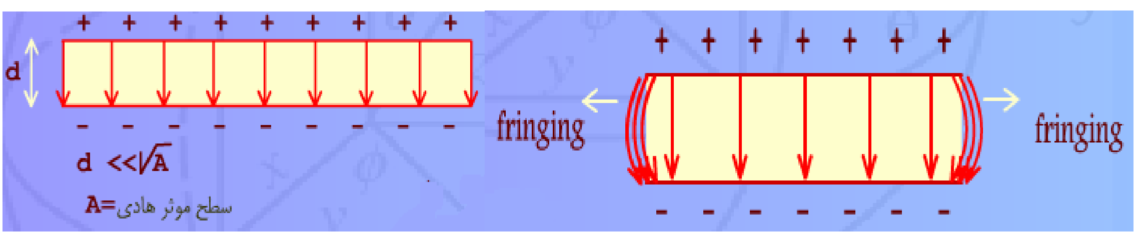
$$F_x=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(cv^2\right)=\frac{V^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\varepsilon\frac{A}{x}\right)=\frac{V^2}{2}\left[-\frac{\varepsilon A}{x^2}\right]$$

$$F_x=-\frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon^2 A^2}{x^2\varepsilon A}=-\frac{1}{2}\frac{V^2C^2}{\varepsilon A}=-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon A}$$

كه همان جواب حالت قبل است.

نكته: در خصوص وضعيت خطوط ميدان در يك خازن چنانچه فاصله بين دو هادي نسبت به ساير ابعاد خازن كوچك نباشد، ميدان در فضاهاي بين دو هادي يكنواخت نخواهد بود و ميدان در رفتگي پيدا خواهد كرد يعني خطوط ميدان در نقاط كناري نسبت به نقاط مياني قطعه (خازن) انحراف خواهد داشت كه به اين مي

داد Fringing Field گويند (فوران ميدان)



فصل سوم

Solution of Electrostatic problems حل مسائل الكترواستاتيك

تاكنون سه روش محاسبه شدت ميدان الكترويكي (حل مسئله ميزان الكتريكي ساكن) در فصل قبل ارائه و بررس گرديد. در اين فصل روش‌ها و تكنيك‌هاي ديگري ارائه مي‌شود.

معادلات لاپلاس و پواسون

$$\nabla_0 \vec{E} = \rho/\varepsilon$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla_0(-\nabla V) = \rho/\varepsilon$$

$$\nabla_0(\nabla V) = -\rho/\varepsilon$$

معادله پواسون Poisson Equation $\qquad \nabla^2 V = -\rho/\varepsilon$

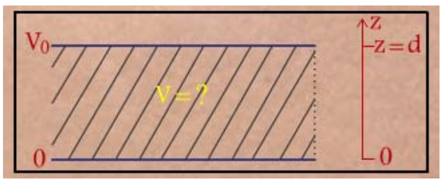
(معادله ديفرانسيل درجه ۲ ولتاژ ناهمگن)

چنانچه در محيط مورد نظر كه V مجهول مي‌باشد و در صدد محاسبه آن هستيم $\rho = 0$ باشد.

معادله لاپلاس Laplace Equation $\qquad \nabla^2 V = 0$

(معادله ديفرانسيل درجه ۲ ولتاژ همگن)

مثال: مطلوبست محاسبه تابع پتانسيل بين صفحات يك خازن بنحوي كه پتانسيل صفحه پايين صفر و صفحه بالا در پتانسيل V_0 قرار دارد. از فوران ميدان در لبه خازن صرفنظر مي‌شود.



$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

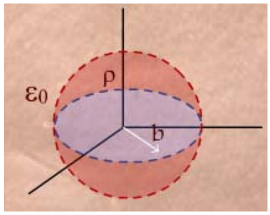
$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dz} = c_1 \quad \Rightarrow \quad dV = c_1 dz \quad \Rightarrow \quad V = c_1 z + c_2$$

$$z = 0 \Rightarrow V = 0 \Rightarrow V(z=0) = c_1(0) + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$z = d \Rightarrow V = V_0 \Rightarrow V(z=d) = c_1(d) + c_1 = V_0 \Rightarrow c_1 = \frac{V_0}{d}$$

بنابراين: $\qquad V(x,y,z) = \frac{V_0}{d} z$

مثال: چنانچه بار حجمي پيوسته‌اي به چگالي $\rho_0 \frac{R}{b}$ تا فاصله b از مبدأ مختصات در فضاي آزاد $\varepsilon = \varepsilon_0$ مستقر باشد، مطلوب است محاسبه تابع پتانسيل و شدت ميدان در كليه نقاط فضا با استفاده از معادلات لاپلاس يا پواسون



$$R<b: \qquad \rho = 0$$

$$\nabla^2 V_1 = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}(R^2\frac{dV_1}{dR}) = 0$$

$$\frac{d}{dR}(R^2\frac{dV_1}{dR}) = 0$$

$$R^2\frac{dV_1}{dR} = c_1$$

$$\frac{dV_1}{dR} = \frac{c_1}{R^2} \qquad \rightarrow \qquad \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow E_1 = -\frac{dV_1}{dR} = -\frac{c_1}{R^2}$$

$$dV_1 = \frac{c_1}{R^2}dR$$

$$V_1 = -\frac{c_1}{R} + c_2$$

$$0 \le R \le b: \qquad \rho = \rho_0 \frac{R}{b}$$

$$\nabla^2 V_2 = -\frac{p}{\varepsilon} \qquad , \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}(R^2\frac{dV_2}{dR}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\rho_0\frac{R}{\varepsilon_0 b}$$

$$d(R^2\frac{dV_2}{dR}) = -\rho_0\frac{R^3}{\varepsilon_0 b}dR$$

$$R^2\frac{dV_2}{dR} = -\frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 b} + c_1' \qquad \rightarrow \qquad E_2 = -\frac{dV_2}{dR} = \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0 b} - c_1'/R^2$$

$$dV_2 = -\frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0 b}dR + \frac{c_1'}{R^2}dR$$

$$V_2 = -\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 b} - \frac{c_1'}{R} + c_2'$$

c_2', c_1', c_2, c_1 مجهول هستند.

با اعمال شرایط اولیه یا به عبارتي شرایط مرزي چهار مجهول فوق به دست خواهد آمد.

$$R = 0 \quad \Rightarrow \quad V \neq \infty \quad \Rightarrow \quad V_2 = -0 - \frac{C_1'}{0} + C_2' \quad \Rightarrow \quad C_1' = 0$$

$$R \to \infty \quad \Rightarrow \quad V \neq \infty \quad \Rightarrow \quad V_1 = -\frac{C_1}{R}\bigg|_{R\to\infty} + C_2 = 0 + C_2 = 0$$

(با انتخاب مبدأ پتانسیل صفر در بي‌نهایت)

بدلیل آنکه تابع پتانسیل بایستي یك تابع پیوست باشد. بنابراین

$$R=b \quad V_1=V_2 \Rightarrow -\frac{C_1}{b}=-\frac{\rho_0 b^3}{12\varepsilon_0 b}+C_2'$$

همچنین با توجه به آنکه $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ در نتیجه:

$$\left.(E_1=E_2)\right|_{R=b} \Rightarrow -\frac{c_1}{b}=-\frac{\rho_0 b^2}{4\varepsilon_0 b} \Rightarrow c_1=-\frac{\rho_0 b^3}{4\varepsilon_0}$$

و نهایتاً:

$$c_2'=-\frac{c_1}{b}+\frac{\rho_0 b^2}{12\varepsilon_0}=\frac{\rho_0 b^2}{3\varepsilon_0}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} V_1=\dfrac{\rho_0 b^3}{4\varepsilon_0 R} \\ \vec{E}_1=\dfrac{\rho_0 b^3}{4\varepsilon_0 R^2}\hat{a}_R \end{cases}$$

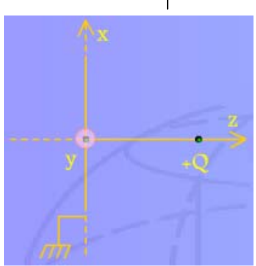
$$\begin{cases} V_2=-\dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 b}+\dfrac{\rho_0 b^2}{3\varepsilon_0} \\ \vec{E}_2=\dfrac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0 b}\hat{a}_R \end{cases}$$

توجه: در انتخاب معادله پواسون یا معادله لاپلاس این نکته حائز اهمیت است که تابع V مجهول ناحیه ای که در صدد یافتن (حل) آن هستیم، تعیین کننده خواهد بود یعنی اگر در آن ناحیه $\rho=0$ باشد معادله لاپلاس و در غیر انصورت معادله پواسون مطرح خواهد شد و سایر نواحی در این انتخاب دخیل نمی باشند و تأثیرات سایر نواحی در شرایط مرزی در حل معادله دیفرانسیلی لحاظ خواهد شد.

روش تصاویر Images Methad

در یک محیط که شامل یک توزیع بار مشخص در مقابل یک جسم هادی باشد می توان از این روش برای یافتن تابع پتانسیل استفاده نمود به نحوی که از طریق استقرار یک بار مجازی بنام بار تصویری بتوان جسم هادی را حذف نمود و مسئله را تبدیل به فضای خالی از جسم هادی کرد تا براحتی بتوان پتانسیل را صرفاً با در نظر گرفتن بار اصلی (حقیقی) و بار مجازی (تصویری) محاسبه نمود. در این روش جسم هادی همانند یک سیستم آینه عمل کرده و تصویر بار حقیقی بصورت یک بار تصویری در مسئله ظاهر می شود.

مثال: بار نقطه ای در مقابل صفحه هادی بینهایت، زمین شده. صفحه در موقعیت z=۰ قرار دارد و بار نقطه ای +Q در نقطه $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{vmatrix}$



در ناحیه $z \le 0$:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^z} = 0$$

اما با توجه به نامحدود بودن صفحه هادی و تقارن موجود

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

بنابراین:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = c_1 z + c_2$$

اما:

$$V(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$V(z \to \infty) \neq \infty \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

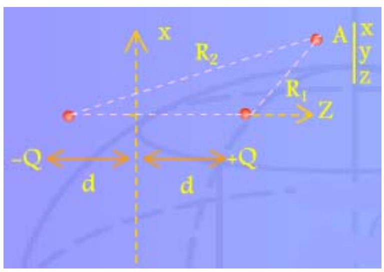
در نتیجه:

$$V\Big|_{z \le 0} = 0$$

پس جواب ناحیه $z \le 0$ مشخص است و روش تصاویر را صرفاً برای خارج از این ناحیه بکار می بریم اما در ناحیه z>۰:

چنانچه تصویر بار Q+ در صفحه هادی بینهایت بدست آوریم بار تصویری آن به میزان q=-Q و در موقعیت $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{vmatrix}$ مستقر می شود.

بنابراین با استقرار Q– در z=-d، جسم هادی را حذف می کنیم.



$$V(x,y,z) = \Big|_{z>0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{+Q}{R_1} + \frac{-Q}{R_2}\right]$$

اما

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

یعنی:

$$V\Big|_{z \ge 0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}}\right]$$

که معادله تأئید کننده حفظ شرایط مسئله در زمان قبل از حذف هادی و استقرار بار مجازی – Q می باشد چون:

V(z=۰)=۰

محاسبه شدت میدان

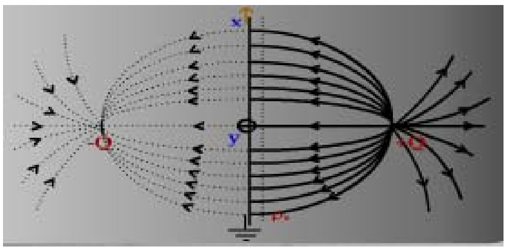
$$\vec{E}\Big|_{z>0} = -\nabla V = \left\lfloor \frac{\ }{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\ }{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z \right\rfloor$$

برای تعیین چگالی بار سطحی القاء شده بر روی صفحه هادی

$$\rho_s = D_n\Big|_{Z=0} = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_z\Big|_{z=0}$$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2(z-d)}{2\left[x^2+y^2+(z-d)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{-2(z+d)}{2\left[x^2+y^2+(z+d)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$E_z\Big|_{Z=0} = \frac{+2Q}{4\pi\varepsilon_\circ\left[x^2+y^2+d^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qd}{2\pi\varepsilon_\circ\left(r^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



بنابراین

$$\rho_s = -\frac{Qd}{2\pi\left(r^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_s \quad \text{is} \quad \max$$

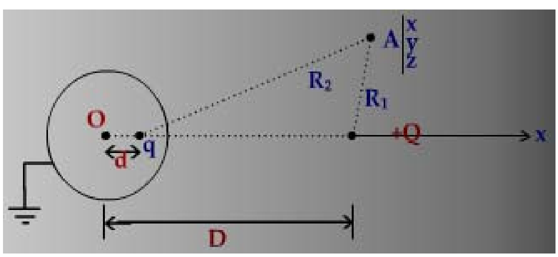
$$r \to \infty \quad \Rightarrow \quad \rho_s \to 0$$

کل بار توزیع شده روی صفحه هادی

$$q = \int \rho_s ds$$

$$q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-Qd}{2\pi\left[r^2+d^2\right]^{\frac{3}{2}}} rdrd\varphi = -Q$$

مثال: بار نقطه ای در مقابل کره هادی زمین شده به شعاع a و به فاصله D از مرکز کره



موقعیت +Q در $\left|\begin{matrix}0\\0\\D\end{matrix}\right.$ مرکز کره در مبدأ مختصات قرار دارد.

برای حذف هادی باید بار تصویر q در موقعیت $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{vmatrix}$ در نظر گرفت به نحوی که

V(R=a)=۰

پتانسیل در ناحیه $R \le a$:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{dV}{dR}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad V = -\frac{C_1}{R_1} + C_2$$

$$V(R=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$V(R=a) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

بنابراین:

$$V\Big|_{R\le a} = 0$$

اما برای ناحیه R>a:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R_2}\right]$$

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-D)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$V = \Big|_{R\ge a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-D)^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-D)^2}}\right]$$

با توجه به آنکه باید V(R=a)=۰ شود بنابراین برای یافتن دو مجهول q و d با اعمال $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ در رابطه اخیر می توان q و d بقرار زیر بدست آورید:

$$d = \frac{a^2}{D} \quad , \quad q = -\frac{a}{D}Q$$

واضح است که

$$d = \frac{a^2}{D} < a$$

یعنی q در داخل کره مستقر است و

$$\frac{a}{D} < 1 \quad \Rightarrow \quad |q| < Q$$

یعنی بار تصویر از بار اصلی کوچکتر و مخالف علامت Q است.

نکته: می توان برای حل برخی از مسائل مشابه، از دیدگاه آینه ها و سیستم نوری بهره جست بعبارتی بارهای تصویری را از طریق سیستم آینه تعیین کرد و سپس هادی را حذف نمود و محیط را بدون اجسام هادی بررسی و پارامترها را بدست آورد.

مسائل مقدار مرزی Boundary value problems

در این قسمت به حل معادله لاپلاس از دیدگاه ریاضی یعنی حل معادله دیفرانسیل درجه ۲ همگن از طریق روش متغیر جدا (Separation variable) می پردازیم به این مفهوم که $\nabla^2 V$ که شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم هر سه متغیر در هر دستگاه مختصات است را با در نظر گرفتن آنکه تابع مجهول V معادل حاصل ضرب سه تابع تک متغیره می باشد در صدد یافتن آنها

خواهیم شد. حل مسئله فوق در فضائی است که توزیع بار تنها روی سطوح (مرزهای) محدود کننده آن فضا قرار دارد و پتانسیل در ناحیه بدون بار صدق می کند.

بعنوان مثال در دستگاه مختصات مستطیلی

$$V(x,y,z)=?$$

$$\nabla^2 V = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

$$V(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z) \quad , \quad X(x)=? \quad , \quad Y(y)=? \quad , \quad Z(z)=?$$

با جایگزین V فوق در معادله لاپلاس

$$YZ\frac{d^2x(x)}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y(y)}{dy}+XY\frac{d^2Z(z)}{dZ^2}=0$$

با تقسیم طرفین بر تابع XYZ که در کلیه نقاط فضای مورد نظر مخالف صفر است خواهیم داشت:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = \text{مقدارثابت} = {K_x}^2 \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = \text{مقدارثابت} = {K_y}^2 \\ \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2Z}{dz^2} = \text{مقدارثابت} = {K_z}^2 \end{cases}$$

با شرط: ${K_x}^2+{K_y}^2+{K_z}^2=0$

بسته به آنگه K^2 ها مثبت، منفی و یا صفر باشند جوابهای هر یک از سه معادله دیفرانسیل درجه ۲ همگن تک متغیره بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{f(\alpha)}\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2}={k_\alpha}^2 \qquad (\alpha = x,y,z \quad ; \quad X,Y,Z)$$

$$if \quad {k_\alpha}^2=0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha)=A\alpha+B$$

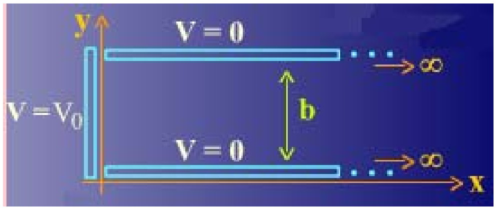
$$if \quad {k_\alpha}^2>0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha)=Ae^{k_\alpha \alpha}+Be^{-k_\alpha \alpha} \text{ یا } A\sinh(k_\alpha \alpha)+B\cosh(k_\alpha \alpha)$$

$$if \quad {k_\alpha}^2<0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha)=A\sin(k_\alpha \alpha)+B\cos(k_\alpha \alpha)$$

برای یافتن ضرائب ثابت از مقادیر (شرایط) مرزی هر جهت استفاده می شود بنابراین برای یک مسئله کامل سه بعدی با توجه به آنکه معادله دیفرانسیل درجه ۲ است نیازمند ٦ شرط مرزی خواهیم بود.

انتخاب هز یک از حالات فوق بستگی به ساختار مسئله باشد؛ چنانچه در پاسخ ها تکرار صفر در جهت خاصی وجود داشته باشد از توابع پریودیک استفاده می شود- چنانچه دامنه متغیر در جهتی نامحدود باشد استفاده از توابع نمائی مناسب تر خواهد بود.

مثال: شکل زیر سطح مقطع ساختاری متشکل از سه هادی (دو نیم صفحه بینهایت و موازی که در یک طرف آن هادی سوم قرار دارد) نشان می دهد (در جهت z نامحدودند) پتانسیل دو صفحه موازی صفر و پتانسیل صفحه کناری برابر V_0 است. مطلوبست توزیع پتانسیل در ناحیه محصور شده بوسیله صفحات.



$$\nabla^2 V = 0$$

چون در امتداد z سطوح هادی نامحدودند بنابراین V مستقل از Z است.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad\qquad v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{1}{z}\frac{d^2 z}{dz^2} = 0 \quad (k_z = 0) \quad \Rightarrow \quad Z(z) = Az + B \quad \Rightarrow \quad Z = B \equiv 1$$

$$V(y=0) = V(y=b) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y=0) = Y(y=b) = 0$$

بنابراین در جهت y تابع پتانسیل پریودیک می باشد.

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^y(y)}{dy^2} = k_y^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = c\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)$$

$$Y(y=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$Y(y=b) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = c\sin(k_y b) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_y b = n\pi$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

اما

$$k_x^2 + k_y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x^2 = -k_y^2$$

$$k_y^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad k_x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = E\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + F\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

یا:

$$X(x) = Ee^{\frac{n\pi}{b}x} + Fe^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

$$X\big|_{x\to\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

بنابراین:

$$V(x,y,z) = BFCe^{-\frac{n\pi}{b}}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \equiv Ge^{-\frac{n\pi}{b}x}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

بدلیل خطی بودن معادلات دیفرانسیل، ترکیب خطی تمامی جوابها به ازاء nهای مختلف می تواند جواب V(x.y.z) باشد یعنی:

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

آخرین ضریب مجهول را با اعمال آخرین شرط مرزی بدست می آید:

$$V\big|_{x=0} = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^0 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

ضرائب A_n ها از دو طریق قابل محاسبه هستند: سری فورید و استفاده از متعامد بودن توابع مثلثاتی یعنی:

$$\int_0^b \sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{b}y\,dy = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ b/2 & m = n \end{cases}$$

بنابراین طرفین آخرین معادله را اگر در $y \frac{m\pi}{b} \sin$ ضرب نموده و انتگرال گرفته شود:

$$\int_0^b V_0 \sin\frac{m\pi}{b}y \quad dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^a \sin\frac{n\pi}{b}y \sin\frac{m\pi}{b}y \quad dy$$

طرف دوم تنها در حالت m=n مقدار غیر صفر دارد.

$$V_0\left(\frac{-b}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{b}y\right]_0^b = A_m\frac{b}{2}$$

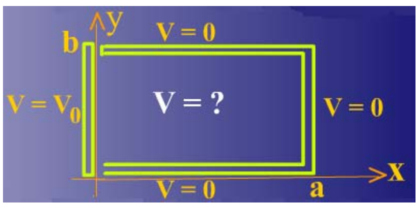
$$A_m = \frac{2V_0}{m\pi}[1-\cos]m\pi$$

$$A_m = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{m\pi} & m \text{ فرد} \\ 0 & m \text{ زوج} \end{cases}$$

بنابراین:

$$V(x,y,z) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1 \text{ فرد}}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{b}x}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

مثال: چنانچه سطح مقطع ساختار مثال قبل در جهت x باشد مطلوبست محاسبه تابع پتانسیل در داخل فضای محصور شده چهار هادی فوق (در جهت z نامحدود است)



$$V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$K_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(z) = cte \equiv 1$$

$$Y(y=0) = Y(y=b) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = c\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad K_y = \frac{n\pi}{b} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$k_x^2 + k_y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = Ee^{k_y x} + Fe^{-k_y x}$$

یا:

$$X(x) = E\sinh(k_y x) + F\cosh(k_y x)$$

$$X(x=a) = 0 \quad \Rightarrow \quad E\sinh(k_y x) = -F\cosh(k_y a)$$

$$F = -E\frac{\sinh(k_y a)}{\cosh(k_y a)} \quad \Rightarrow \quad X(x) = P\sinh[k_y(x-a)]$$

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-a)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$V(x=0) = V_0 \quad \Rightarrow \quad A_n = \begin{cases} -\dfrac{4V_0}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

در مختصات استوانه ای:

$V(r,\ \ ,z)\quad R(r)\ (\ \ )Z(z)$

توابع تک متغیره Z,ϕ,R بسته به ساختار مسئله و تقارن های موجود در آن بصورتهای زیر می توانند بدست آیند.

$$R(r):\begin{cases} r^{+n}, r^{-n} \\ \ell nr \\ BesselFunctions: J_n(k_z r) \quad , \quad Y_n(k_z r) \end{cases}$$

$$\varphi(\varphi):\begin{cases} \sin n\varphi \quad , \quad cocn\varphi \\ e^{jn\varphi} \quad , \quad e^{-jn\varphi} \end{cases}$$

$$Z(z):\begin{cases} \sin(k_z z) \quad , \quad \cos(k_z z) \qquad k_z^2 < 0 \text{ اگر} \\ e^{k_z z} \quad , \quad e^{-k_z z} \qquad k_z^2 > 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

n,k_z مربوط به معادلات دیفرانسیل درجه ۲ توابع تک متغیره بترتیب برای تابع z و تابع ϕ است.

در مختصات کروی:

$V(R,\theta,\varphi) = G(R)H(\theta)\phi(\varphi)$

حالات ممکنه:

$$G(R):\{R^m \quad , \quad R^{-(m+1)}$$
$$H(\theta):\{LegendreFunctions: P_m^n(\cos\theta) \quad , \quad Q_m^n(\cos\theta)$$
$$\phi(\varphi):\{\sin n\varphi \quad , \quad \cos n\varphi$$

فصل چهارم

جریان های الکتریکی ماندگار (مستقیم) در محیط های هادی
Steady Electric current

ملاحظه گردید که میدان الکتریکی ساکن یک میدان پایستار است یعنی:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = 0$$

(و نیـز رابطـه $\int \vec{E}.d\vec{l}$ کـه اخـتلاف پتانـسیل را محاسـبه مـی کنـد مـستقل از مـسیر اسـت و متناسـب بـا انـرژی و کـار لازم در میـدان) امـا $\nabla \times \vec{E} = 0$ نـشان دهنـده آنـست کـه در یـک مـسیر بـسته هیچگونـه تبـادل انـرژی صـورت نمـی گیـرد. بنـابراین میـدان الکتریـسیته سـاکن قـادر بـه ایجـاد جریـان دائـم نخواهـد بـود کـه در آن در اثـر عبـور بـار در هـادی تلفـات ایجـاد شـود پـس بـرای داشـتن جریـان دائـم بـه میـدان غیـر کنـسرواتیو (ناپایـستار) اسـت. جریان دائم همیشه با تلفات انرژی همراه است.

نکتـه و یـادآوری: میـدان الکتریکـی در داخـل اجـسام هـادی صـفر اسـت و ایـن بـه خـاطر آنـست کـه بارهـای الکتریکـی روی سـطح آنهـا بنحـوی جمـع مـی شـوند کـه میـدان را صـفر می گردانند.

چگالی جریان الکتریکی

اگر N چگالی الکترون های آزاد یا تعداد الکترون های آزاد در هر متر مکعب در یک نقطه از جسم هادی باشند و هر بار منفرد Q کولمب با سرعت متوسط $\vec{V}\, {}^{m}\!/_{s}$ در حرکت باشد، $\vec{J}$ چگالی جریان در آن نقطه بقرار زیر بدست می آید:

$$\vec{J} = NQ\vec{V}$$

با توجه به آنکه واحد N برابر ($^{\text{تعداد حامل}}\!/_{m^3}$) و واحد Q برابر ($^{\text{کولمب(c)}}\!/_{\text{حامل}}$)و واحد سرعت برابر $^{m}\!/_{\sec}$ بنابراین واحد $\vec{J}$:

$$\frac{^{c}\!/_{\sec}}{m^2} = {}^{Amp}\!/_{m^2}$$

یعنـی $\vec{J}$ مقـدار بـار الکتریکـی اسـت کـه از یـک سـطح یـک متـر مربعـی کـه عمـود بـر بـردار $\vec{V}$ اسـت در مـدت یـک ثانیـه مـی گـذرد. اگـر Q<۰ باشـد $\vec{J}$ بـا $\vec{V}$ در خـلاف هـم و اگـر Q>۰ باشد این دو هم جهت هستند.

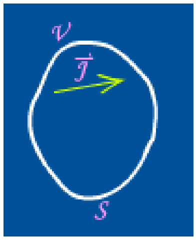
جریان کل: $I = \int_S \vec{J}.d\vec{s}$

واحـد I آمپـر اسـت و برابـر بـا کـل بـار الکتریکـی اسـت کـه در مـدت یـک ثانیـه از سـطح مـورد نظر می گذرد و یک کمیت اسکالر است.

اصل بقاء بار الکتریکی

بارهای الکتریکی را نمی توان ایجاد کرد و یا از بین برد.

شکل ریاضی این اصل:



در خصوص یک سطح بسته S (دارای حجم V) در یک هادی

کل جریان وارد سطح بسته s می شود = $-\oint_s \vec{J}.d\vec{s}$

اگر این انتگرال مثبت باشد میزان بار در داخل سطح در حال افزایش است و برعکس. یعنی رابطه فوق سرعت تغییرات بار یعنی $\frac{\partial Q}{\partial t}$ را نشان می دهد.

(شکل انتگرالی اصل بقاء و بار) $$-\oint \vec{J}.d\vec{s} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$-\oint_s \vec{J}.d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho dv'$$

$$-\int_V \nabla.\vec{J} dv' = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv' \quad \Rightarrow \quad \int_v \left(\nabla.\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dv' = 0$$

(شکل دیفرانسیلی اصل بقاء بار) $$\nabla.\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(دیورژانس $\vec{J}$ نشان دهنده شروع و یا ختم بردار $\vec{J}$ است) $$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

اگر جریانهای یکنواخت بدون تغییرات زمانی وجود داشته باشد: $\nabla.\vec{J} = 0$

یعنی خطوط جریانهای مستقیم خطوط بسته ای هستند که نقطه شروع و نقطه ختم خاصی ندارند.

اگر رابطه فوق برای یک نقطه اعمال شود قانون جریان کریشف را نتیجه می دهد: $\sum_i I_i = 0$

قانون اهم و میدان الکتریکی غیر کنسرواتیو (ناپایستار)

در فرآیند جریان الکتریکی دائم (مستقیم) که با تلفات حرارتی همراه است، هر الکترون (بار) که در این جریان شرکت می کند، به ازاء هر بار که مدار کامل (مسیر بسته) را طی می کند مقدار معینی انرژی دریافت می کند.

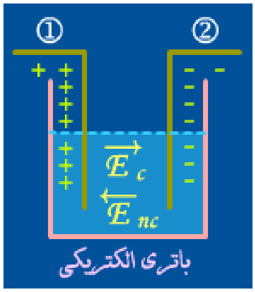
میدانهای پایستار به تنهائی قادر به ایجاد جریان دائم نیستند وبرای این منظور نیازمند به میدان خاصی است مانند پیل الکتریکی، که در آن هم میدان پایستار و هم ناپایستار تولید می شود.

فعل و انفعال شیمیایی ⇐ میدان ناپایستار (در خارج پیل یا در داخل مدار) $\vec{E}_{nc}$

تجمع بارهای الکتریکی ⇐ میدان پایستار $\vec{E}_c$

اگر مدار باز باشد، در داخل پیل $E_{nc}=E_c$ (اما در خلاف جهت یکدیگر) چون هیچ جریان از بارها وجود ندارد و نیروئی به آن وارد نمی شود (تعادل)

$$\vec{E}_{nc}+\vec{E}_c=0$$



$\vec{E}_{nc}$ باعث حرکت (تجمع) بار مثبت روی الکترود (۱) و تجمع بار منفی روی الکترود (۲) می گردد

$\vec{E}_c$ ناشی از میدان الکتریکی از طرف بار مثبت به سمت بار منفی است.

بنابراین

(نیروی محرکه الکتریکی)

$$V=-\int_2^1 \vec{E}_c.d\vec{l}=\int_2^1 \vec{E}_{nc}.d\vec{l}=electromotiveForce\equiv emf$$

در داخل منبع

با واحد ولت

اما از طرفی در مدار بسته

$$\oint \vec{E}_c.d\vec{l}=0$$

$$\int_1^2 \vec{E}_c.d\vec{l}+\int_2^1 \vec{E}_c.d\vec{l}=0$$

خارج منبع داخل منبع

$$\int_1^2 \vec{E}_c.d\vec{l}-\int_2^1 \vec{E}_{nc}.d\vec{l}=0 \quad\Rightarrow\quad \int_1^2 \vec{E}_c.\vec{d}l-V=0$$

خارج از منبع

$$\mathrm{V}=\mathrm{emf}=\int_1^2 \vec{E}_c.d\vec{e}=V_1-V_2$$

- قانون اهم یک قانون تجربی است:

$$\vec{J}=\delta\vec{E}$$

($\vec{J}$ با $\vec{E}$ در هر محیط هادی متناسب است)

بطریقی که:

$$\vec{J}=NQ\vec{V}$$

$$\vec{V}=\mu\vec{E}$$

μ ضریب تحرک (mobility)

$$\vec{J}=NQ\mu\vec{E}$$

σ ضریب هدایت محیط (هدایت ویژه) conductivity

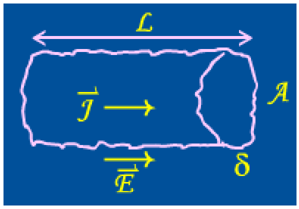
$$\vec{J}=\rho\mu\vec{E} \quad , \quad \sigma=\rho\mu$$

ρ چگالی بار

$$\sigma=NQ\mu \quad , \quad \sigma=\frac{1}{\rho}$$

ρ مقاومت ویژه

- شکل دیگر قانون اهم:



$$I = \int_s \vec{J}.d\vec{s} = \sigma EA$$

$$V = \int \vec{E}.d\vec{l} = EL \quad \Rightarrow \quad E = \frac{V}{L}$$

$$I = \sigma \frac{V}{L} A \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{L/\sigma A} = \frac{V}{R} \qquad V = RI \qquad R = \frac{L}{\sigma A}$$

- محاسبه مقاومت الکتریکی (Resistance)

همانگونه که ملاحظه شد، نسبت اختلاف پتانسیل بین دو سطح از قطعه هادی به جریان عبور کرده از آن سطوح را مقاومت گویند، بنابراین:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \vec{E}.d\vec{l}}{\oint_s \vec{J}.d\vec{s}} = \frac{-\int_L \vec{E}.d\vec{l}}{\oint \sigma\vec{E}.d\vec{s}}$$

اما از طرفی

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_s \vec{D}.d\vec{s}}{-\int_L \vec{E}.d\vec{l}} = \frac{\oint_s \varepsilon\vec{E}.d\vec{s}}{-\int \vec{E}_L.d\vec{l}}$$

چنانچه طرفین دو رابطه فوق در هم ضرب شود:

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

[در صورتیکه ε,σ مستقل از مختصات باشند (محیط همگن) و یا وابستگی به مختصات برای دو یکسان باشد، چه در غیر اینصورت رابطه فوق قابل اعمال نیست.]

بنابراین روشهای محاسبه مقاومت الکتریکی:

با یافتن $\vec{E}$ در محیط:

$$1)R = \frac{-\int \vec{E}.d\vec{l}}{\oint \sigma\vec{E}.d\vec{s}}$$

با وجود شرط ذکر شده در بالا:

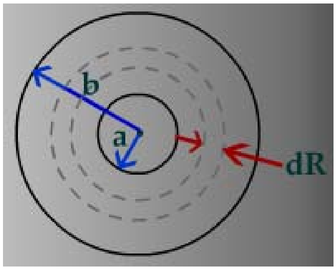
$$2)R = \frac{\varepsilon}{\sigma C} \quad , \quad G = \frac{\sigma C}{\varepsilon} = \frac{1}{R}$$

با تکیه بر ساختار دیفرانسیلی مقاومت و یا کنداکتاس (هدایت الکتریکی)

$$3)dR = \frac{dl}{\sigma s} \quad \Rightarrow \quad R = \int dR = \int \frac{dl}{\sigma s}$$

$$dG = \frac{\sigma ds}{\ell} \quad \Rightarrow \quad G = \int dG = \int \frac{\sigma ds}{\ell}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مقاومت بین دو کره متحدالمرکز بشعاع های a و b (b>a) که فضای بین دو کره از جسمی با ضریب هدایت σ پر شده است.



در مختصات کروی مقاومت یک پوسته کروی به شعاع R از جنس δ و با سطح S و بضخامت dR

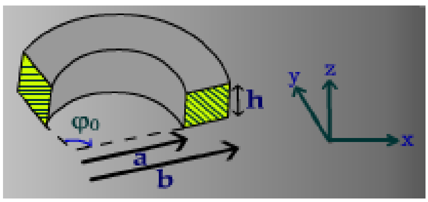
$$\mathrm{d}\mathbf{R} = \frac{dl}{\sigma s}$$

$$dl = dR$$

$$S = 4\pi R^2$$

$$\mathrm{d}\mathbf{R} = \frac{dR}{\sigma 4\pi R^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{R} = \int d\,\mathbf{R} \int_a^b \frac{dR}{4\pi\sigma R^2} = \frac{-1}{4\pi\sigma R}\Bigg]_z^b = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مقاومت قسمتی از یک واشر (استوانه ای به ارتفاع h) مطابق شکل که از هادی با ضریب هدایت σ ساخته شده است (منظور مقاومت بین دو سطح هاشور خورده است)



چنانچه بین دو سطح مذکور اختلاف پتانسیل V_0 متصل گردد:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = 0$$

$$V = c_1\varphi + c_2$$

$$\begin{cases} V(\varphi = 0) = 0 & \Rightarrow \quad c_2 = 0 \\ V(\varphi = \varphi_0) = V_0 & \Rightarrow \quad c_1 = \dfrac{V_0}{\varphi_0} \end{cases}$$

بنابراین:

$$V = \frac{V_0}{\varphi_0}\varphi$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}\hat{a}_\varphi = -\hat{a}_\varphi \frac{V_0}{\varphi_0 r}$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = -\frac{\sigma V_0}{\varphi_0 r}\hat{a}_\varphi$$

$$I=\int \vec{J}.d\vec{s}=\int^{h}\int_{a}^{b}\left(\hat{a}_{\varphi}\frac{\sigma V_0}{\varphi_0}\right).-\hat{a}_{\varphi}\,drdz \qquad d\vec{s}=-\vec{a}_{\varphi}drdz$$

$$I=+\frac{\sigma V_0 h}{\varphi_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$R=\frac{V_0}{I}=\frac{\varphi_0}{\sigma h\ln\frac{b}{a}}$$

قانون ژول

می دانیم که جریان الکتریکی دائم، با تلفات همراه است. در این قسمت هدف محاسبه تلفات یک محیط هادی با جریان دائم است.

$$P=\frac{\Delta w}{\Delta t}=\frac{F\Delta l}{\Delta t}=QEV \quad , \quad \frac{\Delta\ell}{\Delta t}=V \quad , \quad F=QE$$

و چون $J=NQV$ کل در واحد حجم $p=NQEV=EJ$

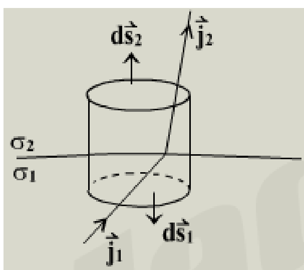
چگالی توان (توان در واحد حجم) $p=\vec{E}.\vec{J}$ $\quad {}^{w}\!/_{m^3}$

در یک قطعه $dv=dsdl$

$$P_{\text{کل}}=\int pdv=\int \vec{E}.\vec{J}dv$$

$$p=\int EJdv=\int Edl\int Jds=VI \quad \Rightarrow \quad P=VI$$

شرایط مرزی برای بردار چگالی بریان



چنانچه سطح بین دو محیط هادی را در نظر بگیریم با فرض جریان یکنواخت و بدون تغییرات زمانی، سطح گاوسی استوانه ای مطابق شکل با ارتفاع h و سطح مقطع Δsرا در نظر بگیرید.

$$\nabla.\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$$\Rightarrow \quad \int_v \nabla.\vec{J}dv'=0 \qquad h\to 0$$

$$\oint_s \vec{J}.d\vec{s}=0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \vec{J}_1.d\vec{s}_1}_{\text{پائین}}+\underbrace{\int \vec{J}_2.d\vec{s}_2}_{\text{بالا}}+\underbrace{\int \vec{J}.d\vec{s}}_{\text{جانبی}}=0$$

$$-\Delta sJ_{1n}+\Delta sJ_{2n}+0=0 \quad \Rightarrow \quad J_{1n}=J_{2n}$$

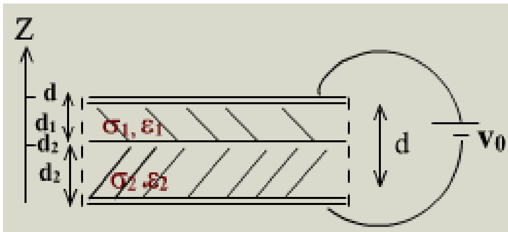
از طرفی

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad \frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2}$$

بنابراین خطوط $\vec{J}$ از یک محیط رساناتر به محیط با رسانائی کمتر $(\sigma_2 < \sigma_1)$ وارد می شوند می شکند و به خط عمود بر سطح مشترک نزدیکتر می گردد.

مثال: فضای بین صفحات موازی خازنی با دو نوع هادی که دارای σ_1, ε_1 و نیز σ_2, ε_2 می باشد پرشده است چنانچه فاصله دو فلز خازن d و ولتاژ منبع متصل به خازن V_0 باشد مطلوبست تعیین $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{J}$ و چگالی بارهای آزاد و مقید روی تمام سطوح در حالت ماندگار

d=d۱+d۲



Steady state $\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla . \vec{J} = 0$

(در حالت عایق تلفی مبنا و شروع محاسبات از بردار $\vec{J}$ می باشد)

$$J_{1n} = J_{2n} = J \quad , \quad E_1 = \frac{J}{\delta_1} \quad , \quad E_2 = \frac{J}{\delta_2}$$

$$V = -\int \vec{E}.dl = -\int_0^d \vec{E}.dz\hat{a}_z = -\int_0^{d_2} \left(-E_2\hat{a}_z\right).\left(\hat{a}_z dz\right) - \int_{d_2}^{d} \left(-E_1\hat{a}_z\right).\left(\hat{a}_z dz\right)$$

$$V_0 = \frac{J}{\sigma_2} d_2 + \frac{J}{\sigma_2} d_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{V_0 \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}\left(-\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{E}_1 = \vec{J}/\sigma_1 = \frac{V_0 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}\left(-\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{J}/\sigma_2 = \frac{V_0 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_2}\left(-\hat{a}_z\right)$$

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{V_0 \varepsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \quad , \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \frac{V_0 \varepsilon_2 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0 \overline{E}_1 = \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0\right)\vec{E}_1 = \frac{V_0 \sigma_2 \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0\right)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}\left(-\hat{a}_z\right)$$

$$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \overline{E}_2 = \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_0\right)\vec{E}_2 = \frac{V_0 \sigma_1 \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_0\right)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_2}\left(-\hat{a}_z\right)$$

$$\rho_s\left(z = 0\right) = \vec{D}_2.\hat{n} = -\frac{V_0 \varepsilon_2 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

روی هادی پائین $\hat{n}\Big|_{z=0} = \hat{a}_z$

$$\rho\left(z = d_2\right) = D_2 - D_1 = \frac{V_0\left(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2\right)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

روی هادی بالا $\left.\hat{n}\right|_{z=d} = -\hat{a}_z$

$$\rho_s(z=d) = \vec{D}_1.\hat{n} = \frac{V_0\varepsilon_1\sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\rho_{ps}(z=0) = \vec{P}_1.\hat{n} = \vec{P}_2.(-\hat{a}_z) = \frac{V_0\sigma_1(\varepsilon_2\varepsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_2}$$

$$\rho_{ps}(z=d_2) = \vec{P}_1 - \vec{P}_2 = V_0\frac{\sigma_2(\varepsilon_1-\varepsilon_0) - V_0(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_2}$$

$$\rho_{ps}(z=d) = \vec{P}_1.\vec{n} = \vec{P}_1.\hat{a}_z = -\frac{V_0\sigma_2(\varepsilon_1\varepsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_2}$$

نکته: برای بررسی حالات گذرا (transient) در خصوص رفتار زمانی توزیع بار (ρ) قبل از رسیدن به حالت ماندگار $(t\to\infty)$ بقرار زیر عمل می شود.

(در صورت همگن بودن محیط یا ثبات δ,ε)

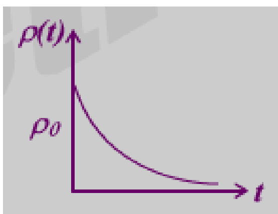
$$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad , \quad \nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla.(\sigma\vec{E}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\sigma\nabla.\vec{E} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\sigma\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$$



$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \mathrm{Re}\,laxationTime \quad \Rightarrow \quad \rho(t=\tau) = \frac{1}{e}\rho_0$$

$$\rho_0 = \rho(t=0)$$

$\frac{\varepsilon}{\delta}$ معیاری برای تشخیص هادی خوب و یا عایق خوب است.

$$if \quad \frac{\varepsilon}{\sigma} >> 1 \quad \Rightarrow \quad goodDielectric$$

$$if \quad \frac{\varepsilon}{\sigma} << 1 \quad \Rightarrow \quad goodConductur$$

(در حالت میدان های متغیر با زمان، این معیار بصورت $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ در نظر گرفته می شود)

فصل پنجم

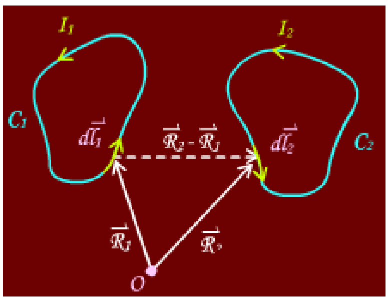
میدان های مغناطیسی ساکن Static Magnetic Fields

یونانیها در حدود ٦٠٠ سال قبل از میلاد با نیروی جاذبه قطعات طبیعی آهنربا آشنا بودند و از کلمه Magnesia (مکانی که اولین بار آهنربای طبیعی در آنجا دیده شده) برای لغت مغناطیس استفاده نمودند.

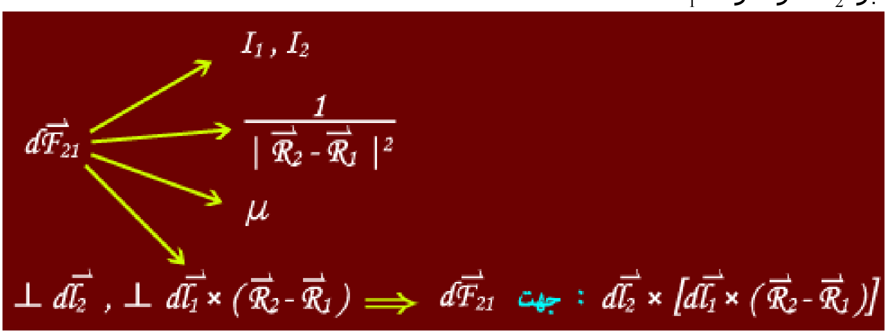
در سال ١٦٠٠ میلادی پزشک دربار انگلستان بنام گیلبوت با آزمایشاتی به وجود آهنربای زمین پی برد. سپس افرادی مانند ولتا، آمپر و بیوساوار بررسی های بیشتر و کشفیات متعددی را بدست آوردند که منجر به ارائه قوانینی در میدان های مغناطیسی گردید.

قانون آمپر در فضای خالی

دو مدار بسته c_2 , c_1 که بترتیب جریان های مستقیم I_2 , I_1 از آنها می گذرد و در فضای خالی مستقر شده اند را در نظر می گیریم (I_2 , I_1 جریان های مستقیم هستند)



نیروی وارد بر dl_2 از طرف dl_1



$$d\vec{F}_{21} = k\mu \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \left[I_1 d\vec{l}_1 \times \left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right)\right]}{\left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|^3}$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-4} \quad H/m$$

μ ضریب نفوذپذیری مغناطیسی Magnetic permeability محیط

$$k = \frac{1}{4\pi}$$

بنابراین کل نیروی وارد بر c_2 حامل جریان I_2 به سبب کل مدار c_1 حامل جریان I_1 عبارتست

از:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{c_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{c_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right)}{\left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|^3}$$

که بنام قانون آمپر معروف است.

چگالی فلوی میدان مغناطیسی Magnetic flux density

در معادله قبل انتگرال دوم (روی مسیر c_1) را چگالی فلوی میدان مغناطیسی تولید شده توسط جریان عبوری از کل مدار c_1 در نقطه $\vec{R}_2$ گفته می شود.

$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{c_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right)}{\left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|^3}$$

بنابراین

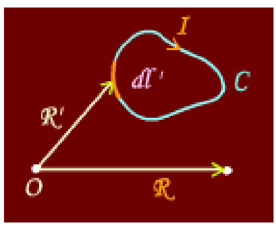
$$\vec{F}_{21} = \oint_{c_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{21}$$

واحد $\vec{B}$ نیوتن بر آمپر یا وبر بر متر مربع می باشد که به آن تسلا گویند.

$$N/Amp \equiv Wb/m^2 \equiv Tesla$$

بنابراین با توجه به تعریف فوق، در هر نقطه دلخواه $\vec{R}$ بردار $\vec{B}$ بعلت وجود یک مدار حامل جریان بصورت روبرو محاسبه می شود:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_c \frac{Id\vec{l}' \times \left(\vec{R} - \vec{R}'\right)}{\left|\vec{R} - \vec{R}'\right|^3}$$



که به قانون بیوساوار Biot & Savart مشهور است.

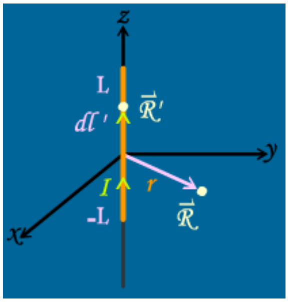
برای منابع جریان سطحی و حجمی بترتیب با چگالی جریان $\vec{J}, \vec{J}_S$ بردار $\vec{B}$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{J}_S dS' \times \left(\vec{R} - \vec{R}'\right)}{\left|\vec{R} - \vec{R}'\right|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J} dV' \times \left(\vec{R} - \vec{R}'\right)}{\left|\vec{R} - \vec{R}'\right|^3}$$

نکته: از $\vec{k}$ بجای $\vec{J}_S$ نیز استفاده می شود واحد $\vec{J}_S$ برابر Amp/m است.

مثال: چنانچه جریان مستقیم I در یک سیم مستقیم بطول ۲L جاری باشد، $\vec{B}$ در نقطه ای واقع در صفحه عمودالمنصف این سیم که بفاصله r از سیم قرار دارد را بدست آورید:



$$\vec{B}(\vec{R})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_c \frac{Id\vec{l}'\times(\vec{R}-\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|^3}$$

$$\vec{R}=r\hat{a}_r$$

$$\vec{R}'=z'\hat{a}_z$$

$$d\vec{l}'=d\vec{l}_z=\hat{a}_z dz'$$

$$\vec{R}-\vec{R}'=r\hat{a}_r-z'\hat{a}_z$$

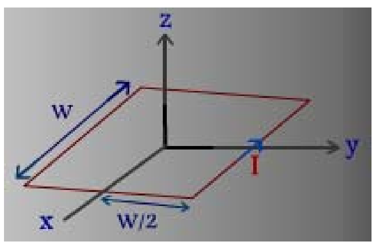
$$|\vec{R}-\vec{R}'|=\sqrt{r^2+z'^2}$$

$$\vec{B}(\vec{R})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{Idz'\hat{z}_z\times(r\hat{a}_r-z'\hat{a}_z)}{\left[r^2+z'^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{R})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{rdz'\hat{a}_\varphi-0}{\left[r^2+z'^2\right]^{3/2}}=\hat{a}_\varphi\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\frac{z'}{\sqrt{r^2+z'^2}}\right)\Bigg]_{-L}^{L}$$

$$\vec{B}(\vec{R})=\frac{\mu_0 IL}{2\pi r\sqrt{r^2+L^2}}\hat{a}_\varphi \qquad Tesla$$

مثال: مطلوبست محاسبه چگالی فلوی میدان مغناطیسی در مرکز یک مدار مربع شکل که جریان I از آن عبور می کند طول ضلع مربع W می باشد.



$$\vec{B}=4B_1$$

$B_1=$ چگالی فلوی مغناطیسی ناشی از سیم بطول W در فاصله $\frac{W}{2}$

با تکیه بر نتیجه مثال قبل:

$$2L=W \quad , \quad r=\frac{W}{2}$$

$$\vec{B}_1\left(\frac{W}{2}\right)=\frac{\mu_0 I\, W/2}{2\pi\frac{W}{2}\sqrt{\left(\frac{W}{2}\right)^2+\left(\frac{W}{2}\right)^2}}\hat{a}_z$$

$$\vec{B}=4\vec{B}_1=\frac{4\mu_0 I}{2\pi\, W/2\,\sqrt{2}}\hat{a}_z \quad\Rightarrow\quad \vec{B}=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi W}\hat{a}_z$$

پتانسیل مغناطیسی برداری

دیده می شود که محاسبه $\vec{B}$ از طریق قانون بیوساوار که با انتگرال گیری برداری صورت می گیرد مشکل است. حال می توان نشان داد که $\vec{B}$ براحتی از برداری که بنام پتانسیل مغناطیسی برداری تعریف می شود محاسبه کرد:

$$\vec{B}(\vec{R})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \nabla\times\left[\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|}\right]dv'$$

$$\vec{B}=\nabla\times\left[\frac{\mu}{4\pi}\int_v\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|}dv'\right]$$

$$\vec{A}(\vec{R})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_v\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|}dv'$$ پتانسیل مغناطیسی برداری Vector magnetic potential

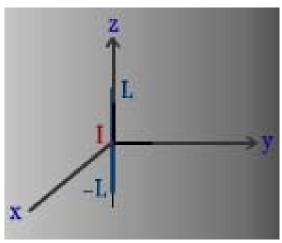
که برداری است همجهت با منبع جریان و کرل آن چگالی فلوی میدان را نتیجه می دهد.

$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

[مشابه پتانسیل الکتریکی که منفی گرادیان آن شدت میدان الکتریکی را نتیجه می دهد. $\vec{E}=-\nabla V$] واحد $\vec{A}$ برابر با Web/m است. طبق رابطه بالا عمود بودن جهت $\vec{A},\vec{B}$ (یا منبع) طبق قانون دست راست نشان می دهد.

مثال: مطلوبست محاسبه $\vec{B}$ ناشی از یک سیم مستقیم بطور ۲L حامل جریان I در نقطه ای بر روی صفحه عمودالمنصف سیم با استفاده از محاسبه $\vec{A}$

با توجه به مثال های گذشته



$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}\,'}{|\vec{R}-\vec{R}'|}$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{dz'\hat{a}_z}{\sqrt{r^2+z'^2}}=\hat{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}ln\left(z'+\sqrt{z'^2+r^2}\right)\Big]_{-L}^{L}$$

$$\vec{A}(\vec{R})=\hat{a}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\sqrt{L^2+r^2}+L}{\sqrt{L^2+r^2}-L}\qquad Web/m$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\hat{a}_r\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\hat{a}_\varphi\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

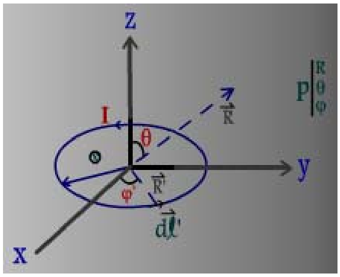
چون $\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}=0$ است بنابراین:

$$\vec{B}=\hat{a}_\varphi\frac{\mu_0 IL}{2n r\sqrt{L^2+r^2}}$$

یعنی I (یا $\vec{A}$) که در جهت $\hat{a}_z$ است، طبق قانون دست راست $\left(\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\right)$ که انگشت شست در جهت I است، جهت $\vec{B}$ در جهت جمع شدن سایر انگشتان یعنی $\hat{a}_\varphi$ خواهد بود.

دو قطبی مغناطیسی Magnetic Dipole

یک دو قطبی مغناطیسی متشکل از یک حلقه دایره ای کوچک بشعاع مشخصی است که جریان الکتریکی از آن عبور می کند. بعنوان مثال مطابق شکل یک مدار دایره ای شعاع b که جریان الکتریکی از آن عبور می کند بعنوان مثال مطابق شکل یک مدار دایره ای بشعاع b که جریان I از آن می گذرد را در نظر بگیرید چگالی فلوی میدان مغناطیسی بعلت این ساختار در فواصل دور (R>>b) بصورت زیر محاسبه می شود.



موقعیت نقطه کلی P در مختصات کروی (R,θ,φ) و موقعیت دیفرانسیل منبع Idl' بصورت $\left(b,\frac{\pi}{2}\ \varphi'\right)$ است.

$$\vec{A}(\vec{R}')=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_c\frac{Id\vec{l}}{|\vec{R}-\vec{R}'|}$$

$$\vec{R}=\hat{a}_x x+\hat{a}_y y+\hat{a}_z\ =R\hat{a}_R$$

$$\vec{R}'=\hat{a}_x b\cos\varphi'+\hat{a}_y b\sin\varphi'=b\hat{a}_{r'}$$

$$\vec{R}-\vec{R}'=(x-b\cos\varphi')\hat{a}_x+(y-b\sin\varphi')\hat{a}_y+z\hat{a}_z$$

$$|\vec{R}-\vec{R}'|=\sqrt{(x-b\cos\varphi')^2+(y-b\sin\varphi')^2+z^2}$$

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{R}'|}=\left[x^2+y^2+z^2+b^2-2bx\cos\varphi'-2by\sin\varphi'\right]^{-\frac{1}{2}}$$

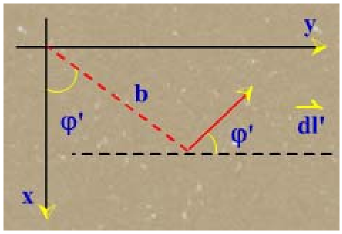
$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{R}'|}=\left[R^2+b^2-2bx\cos\varphi'-2by\sin\varphi'\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{R}'|}=R^{-1}\left[1+\frac{b^2}{R^2}-\frac{2bx}{R^2}\cos\varphi'-\frac{2by}{R^2}\sin\varphi'\right]^{-\frac{1}{2}}$$

برای فواصل دور:

$$R>>b\quad\Rightarrow\quad\frac{b^2}{R^2}\to 0$$

بنابراین با تقریب فوق و استفاده از دو جمله ای نیوتن:



$$\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|} \approx \frac{1}{R}\left[1+\frac{bx}{R^2}\cos\varphi' + \frac{by}{R^2}\sin\varphi'\right]$$

$$d\vec{l}\,' = \hat{a}_\varphi b d\varphi' = -\hat{a}_x b\sin\varphi' d\varphi' + \hat{a}_y b\cos\varphi' d\varphi'$$

$$d\vec{l}\,' = bd\varphi'\left[-\hat{a}_x\sin\varphi' + \hat{a}_y\cos\varphi'\right]$$

$$\vec{A}(\vec{R}) \approx \frac{\mu_0 Ib}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\left(-\hat{a}_x\sin\varphi' + \hat{a}_y\cos\varphi'\right)\left[1+\frac{bx}{R^2}\cos\varphi' + \frac{by}{R^2}\sin\varphi'\right]d\varphi'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 Ib}{4\pi R}\left(-\hat{a}_x\frac{yb}{R^2}\pi + \hat{a}_y\frac{xb}{R^2}\pi\right)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 Ib^2\pi}{4\pi R^3}\left(-\hat{a}_x y + \hat{a}_y x\right)$$

ممان دو قطبی مغناطیسی بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{M} = \hat{a}_z SI$$

$$S = DipoleArea = \pi b^2$$

بنابراین

$$\vec{A}(R) = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\left[\hat{a}_z \times \vec{R}\right]$$

با توجه به آنکه

$$\hat{a}_z \times \vec{R} = -\hat{a}_x y + \hat{a}_y x$$

در نتیجه

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 \vec{M}\times\vec{R}}{4\pi R^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\vec{M}}{R}\right)$$

و یا:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \hat{a}_\varphi\frac{\mu_0 M}{4\pi R^2}\times\sin\theta$$

چون $\hat{a}_z \times \hat{a}_R = \hat{a}_\varphi \sin\theta$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0 I\pi b^2}{4\pi R^3}\left[\hat{a}_R 2\cos\theta + \hat{a}_\theta\sin\theta\right]$$

- تشابه و دوگان در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

با توجه به:

الکتریکی: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho dv'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$ $\qquad V = \frac{\vec{P}.\hat{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ $\qquad \vec{E} = -\nabla V$

مغناطیسی: $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}dv'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$ $\qquad \vec{A} = \frac{\mu_0\vec{M}\times\hat{a}_R}{4\pi R^2}$ $\qquad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

می توان گفت که:

:	ρ	v	$\vec{P}$	$\vec{E}$	$\frac{1}{\varepsilon_0}$	0	∇
مغناطیسی :	$\vec{J}$	$\vec{A}$	$\vec{M}$	$\vec{B}$	μ_0	X	∇X
	منبع	پتانسیل	ممان دوقطبی	میدان	ضریب نفوذپذیری	ضرب	مشتق

- دیورژانس و کرل $\vec{B}$

می دانیم که دیورانس کرل هر بردار برابر صفر است بنابراین

$$\nabla.\vec{B} = \nabla.\left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0$$

و یا:

$$\nabla.\vec{B} = 0$$

صفر شدن دیورژانس $\vec{B}$ به این مفهوم است که خطوط میدان $\vec{B}$ خطوط بسته ای هستند که نقطه شروع و نقطه ختم مشخص ندارد و یا بعبارتی قطب مثبت یا منفی مانند میدان الکتریکی نداشته و بعبارتی تک قطب در میدان مغناطیسی وجود ندارد بلکه بصورت دو قطبی است.

از طرفی B بعنوان چگالی فلوی مغناطیسی می تواند در محاسبه فلوی میدان مغناطیسی عمل نماید یعنی کل فلوی مغناطیسی که از سطح S خارج می شود:

$$\psi = \int_S \vec{B}.d\vec{s}$$

اگر S سطح بسته ای باشد

$$\oint_S \vec{B}.d\vec{s} = \int_V \nabla.\vec{B}dv = 0$$

همچنین

$$\psi = \int_S \vec{B}.d\vec{s} = \int_S \nabla \times \vec{A}.d\vec{s} = \oint_C \vec{A}.d\vec{l}$$

می دانیم که طبق قضیه هلمهولتس برای مشخص کردن یک میدان بایستی کرل و دیورژانس آن میدان معین نمائیم.

محاسبه کرل:

می دانیم که برای هر برداری

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla\left(\nabla.\vec{F}\right) - \nabla^2 \vec{F}$$

از طرفی

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{\left|R - R'\right| DV'}$$

چنانچه از طرفین کرل بگیریم، می توان ثابت کرد که:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} = \vec{J}$$

همچنین باتوجه به روابط برداری می توان ثابت کرد که: $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$

که مشابه $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ در میدان الکتریکی ساکن است.

قانون مداری آمپر Ampere’s circuital low

می دانیم که:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

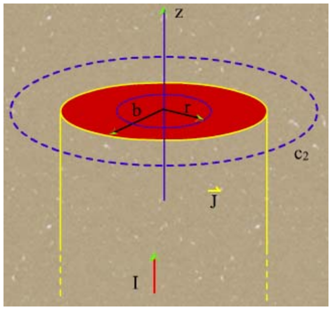
$$\int_S \nabla \times \vec{B}.d\vec{s} = \int \mu.\vec{J}.d\vec{s}$$

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{J}.D\vec{S}$$

یا بعبارتی انتگرال $\vec{B}$ روی یک مسیر بسته C برابر است با μ_0 برابر کل جریانی که از سطح S که مسیر بسته C آنرا احاطه کرده است.

رابطه فوق مشابه قانون گاوس در میدان الکتریکی است که می تواند جهت محاسبه $\vec{B}$ که روی همه نقاط مسیری مقدار مساوی داشته باشد بکار گرفته شود.

مثال: یک هادی مستقیم و بسیار طویل با سطح مقطع دایره ای به شعاع b جریان ماندگار I را حمل می کند چگالی فلوی میدان مغناطیسی در کل فضا را بدست آورید:



با فرض توزیع یکنواخت جریان در سطح مقطع هادی:

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi b^2}\hat{a}_Z$$

C_1 یک مسیر دایره ای به شعاع r است که B روی نقاط آن مقدار ثابتی است. $r \le b$:

$$\oint_{c_1} \vec{B}_1.d\vec{l} = \mu_0 \int_{s_1} \vec{J}.d\vec{s}'$$

$$\vec{B}_1 = B_1\hat{a}_\varphi \quad , \quad d\vec{l} = rd_\varphi \hat{a}_\varphi \quad , \quad d\vec{s}' = r'dr'd\varphi'$$

بنابراین

$$\oint_{c_1} \vec{B}_1.d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B_1\hat{a}_\varphi.\hat{a}_{\varphi r d_\varphi} = B_1 2\pi r$$

$$\int_{s_1} \vec{J}.d\vec{s}_z' = \int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{I}{\pi b}\hat{a}_z.\hat{a}_z r'dr'd\varphi' = \frac{I}{\pi b^2}\pi r^2$$

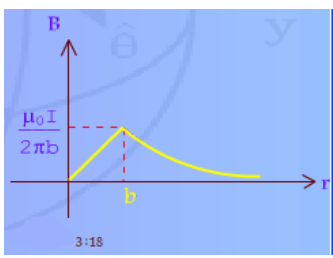
در نتیجه

$$B_1 2\pi r = \mu_0 \frac{Ir^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi b^2}\hat{a}_\varphi$$

اما برای ناحیه r>b

$$\oint_{c_2} \vec{B}_2.d\vec{l} = \mu_0 \int_{s_2} \vec{J}.ds' = \mu_0 I_{total}$$

$$2\pi r B_2 = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$



مثال: مطلوبست تعیین چگالی فلوی میدان مغناطیسی در داخل سیم پیچ حلقوی دارای تعداد دور برابر با N با هسته هوائی که جریان I از سیم پیچ می گذرد. سطح مقطع هسته آن دایره ای و شعاع متوسط آن برابر b و شعاع هسته (هر دور سیم) برابر a می باشد.

در فاصله r<b-a چون هیچ جریانی از یک مسیر دایره ای بشعاع r عبور نمی کند طرف دوم قانون آمپر صفر و بنابراین B=۰ می شود.

همچنین برای r>b+a چون کل جریان $I_{total} = NI - NI = 0$ است باز B=۰ خواهد بود.

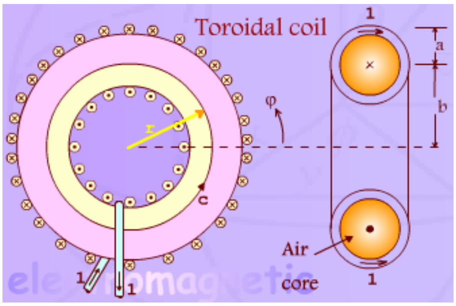
اما b-a<r<b+a

$$\int_c \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I_{total}$$

$$B2\pi r = \mu_0 NI$$

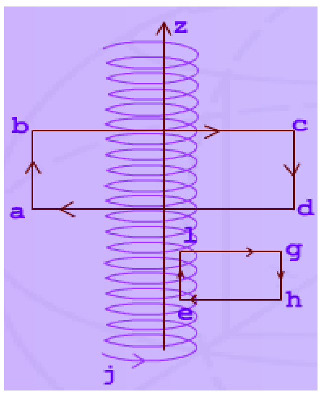
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{\ell_{eff}}\hat{a}_\varphi$$



مثال: مطلوبست محاسبه $\vec{B}$ ناشی از یک سلفوئید طویل، یکنواخت و پیوسته.

شعاع سلفوئید برابر a با جریان عبور از آن برابر I و تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول برابر n است. با فرض آنکه محور سلفوئید منطبق با محور z است، با عنایت به قانون دست راست و نامحدود بودن طول سیم پیچ و یکنواختی آن B تنها دارای مولفه z است.



برای نقاط خارج از سلفوئید:

با مسیر مستطیلی abcd

$$\oint_{abcd} \vec{B}.dl = \mu_0 I_{total}$$

$$I_{total} = (nI - nI)ab = 0$$

$$\oint_{abcd} \vec{B}.d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}.d\vec{l} + \int_d^c \vec{B}.d\vec{l} + \int_c^d \vec{B}.d\vec{l} + \int_b^a \vec{B}.d\vec{l} = 0$$

چون $\vec{B}$, $d\vec{l}$ در دو مسیر bc و da بر هم عمودند

$$= \int_a^b \vec{B}.d\vec{l} + 0 + \int_c^d \vec{B}.d\vec{l} + 0 = 0$$

چون B در جهت z است

$$= B_1.(ab) - B_2(cd) = 0$$

چون فاصله اضلاع ab و cd از سیم پیچ الزاماً برابر نیستند دو حالت ممکن است وجود داشته باشد یا B_1 و B_2 (میدان در خارج از سلفوئید) صفر است و یا در همه جا (خارج از سلفوئید) ثابت.

اما حالت ثابت بودن غیرممکنست بنابراین:

$$B_1 = B_2 = \underset{\text{خارج}}{B} = 0$$

برای نقاط داخل سلفوئید:

با مسیر مستطیلی efgh

$$\oint_{efgh} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I_{total}$$

$$I_{total} = nI(ef)$$

از چهار زیر مسیر تنها مسیر ef انتگرال مقدار دارد

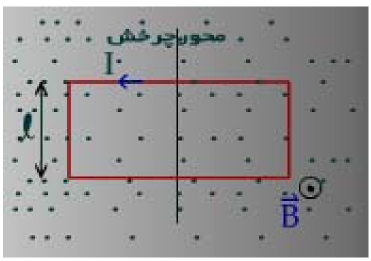
$$\oint_{efgh} \vec{B}.d\vec{l} = \int_e^f \vec{B}.d\vec{l} = B(ef)$$

بنابراین

$$B(ef) = \mu_0 nI(ef) \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 nI\hat{a}_z$$

نکته: زمانی که یک قاب (حلقه) حامل جریان (دو قطبی مغناطیسی) در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد بر دو قطبی نیروئی وارد می شود (گشتاور) بنحوی که ممان مغناطیسی دو قطبی را در جهت میدان قرار گیرد.

بعنوان مثال: اگر یک دو قطبی مغناطیسی به ابعاد l,a (با مساحت s=al) که جریان I از آن عبور می کند در یک میدان یکنواختی با چگالی $\vec{B}$ قرار گیرد، کوپل حرکتی وارد بر دو قطبی را به قرار زیر بدست می آید.



(α زاویه بین $\vec{B},\vec{M}$)

$$\vec{M} = Ia\ell\hat{a}_n$$

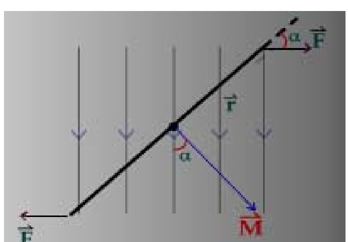
$$\vec{M} = IS\hat{a}_n$$

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

طبق قانون بیووساوار $\vec{F}$ نیروی وارد بر اضلاع بطول l

$$F = IlBisn90^\circ = IlB$$

کوپل نیرو وارد بر دو قطبی، ایجاد گشتاور زیر می کند.



$$\vec{T} = \vec{r} \times 2\vec{F} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{a}{2} \times 2IlB\sin\alpha$$

$$T = alIB\sin\alpha$$

$$T = SIB\sin\alpha$$

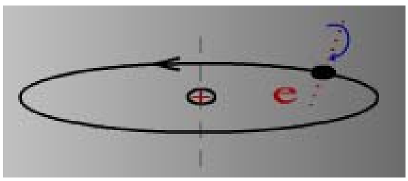
$$T = MB\sin\alpha$$

$$\vec{T} = \vec{M} \times \vec{B}$$

بنابراین دو قطبی تحت تأثیر این گشتاور قرار گرفته و حرکت می کند تا α به مقدار صفر برسد و یا بعبارتی $\vec{M}$ در امتداد $\vec{B}$ قرار گیرد.

انواع اجسام مغناطیسی و میدان مغناطیسی در حضور آنان

در ساختار تمام مواد و عناصر دو قطبی های مغناطیسی که ناشی از چرخش الکترون روی مدار به دور هسته اتم آنان است وجود دارد. علاوه برآن حرکت هر الکترون به دور خود نیز دو قطبی مغناطیسی بوجود می آورد بنابراین در داخل هر اتم دو نوع ممان دو قطبی دیده می شود.



براساس آنکه ممان کل هر اتم در حالت عادی (تعادل) به چه صورت است و عکس العمل آن در زمان اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی چگونه است مواد به دسته-های زیر تقسیم می شوند.

مواد Diamagnetic: ممان کل هر اتم برابر صفر است وقتی که در یک میدان قرار می گیرد، میدان کل کاهش جزئی می یابد موادی مانند: بیسموت، هیدروژن، هلیم، مس، طلا، سیلکیون و جرمانیم

مواد Paramagnetic: ممان کل هر اتم برابر صفر نمی باشد.

وقتی که در یک میدان قرار می گیرد، میدان کل افزایش جزئی می یابد.

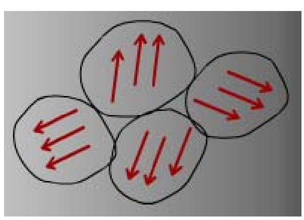
موادی مانند: پتاسیم، اکسیژن و نگستن

این دو مواد را مواد غیر مغناطیسی گویند Nonmagnetic Materials

اما نوع سوم:

مواد مغناطیسی است که بنام Ferromagnetic مشهورند.

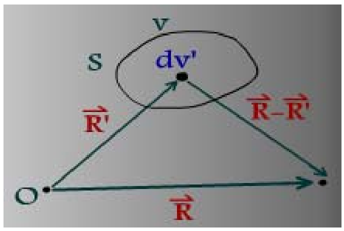
در این نوع ممان کل هر اتم دارای مقدار قابل توجه است و هر دسته بر روی هم اثر گذاشته و حوزه های کوچک مغناطیسی بوجود می آورند که دارای ابعادی تا چند mm^3 هستند.



اما در کل بدلیل نامنظم بودن این حوزه ها، اثر یکدیگر را خنثی می کنند. اما وقتی در یک میدان قرار می گیرند، میدان کل را شدیداً افزایش می دهند.
موادی مانند: آهن، نیکل و کوبالت

جریانهای معادل مغناطیسی

در صورتی که مواد خصوصاً مغناطیسی قرار گیرند، مسئله از حالت ساده یعنی فضای آزاد خارج می شود و قوانین موجود که تا کنون ارائه شده تحت تأثیر و تغییر قرار می گیرد. در این مرحله در پی بررسی موضوع خواهیم بود.
اگر $\vec{m}$ ممان یک اتم جسم مغناطیسی باشد و N تعداد اتم های جسم در واحد حجم بنابراین $\vec{M} = N\vec{m}$ ممان دو قطبی در واحد حجم جسم خواهد بود.
حال می توان میدان مغناطیسی حاصل از جسم مغناطیسی برای ناحیه دور را محاسبه کرد که البته قابل تعمیم برای فواصل نزدیک نیز می باشد.



$$d\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left\{\frac{\vec{M}}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}\right\}dv'$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \nabla\times\left\{\frac{\vec{M}(R')}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}\right\}dv'$$

می توان ثابت کرد:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\nabla'\times\vec{M}}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dv' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_s \frac{\vec{M}\times\hat{n}}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}ds'$$

$\hat{n}$ بردار واحد عمود بر سطح s است.
با مقایسه رابطه اخیر با رابطه اصلی برای منبع جریان حجمی $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}dv'}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}$ و یا

برای منبع جریان سطحی می توان گفت که:

$$\nabla'\times\vec{M} \equiv \vec{J}_m \qquad \left[A/m^2\right]$$

$$\vec{M}\times\hat{n} \equiv \vec{J}_{ms} \qquad \left[A/m\right]$$

$\vec{J}_m$ جریان معادل حجمی مغناطیسی و $\vec{J}_{ms}$ جریان معادل سطحی مغناطیسی که می توانند جایگزین یک ماده مغناطیسی شده و مسئله را به مسئله ساده محیط خلاء تبدیل نمود.

شدت میدان مغناطیسی Magnetic Field Intensity

در صورت وجود جسم مغناطیسی و یک منبع جریان حقیقی

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}+\vec{J}_m}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dv'$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\vec{J}+\vec{J}_m}{\left|\vec{R}-\vec{R}'\right|}dv'$$

و یا:

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\left[\vec{J}+\vec{J}_m\right]$$
$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\left[\vec{J}+\nabla\times\vec{M}\right]$$
$$\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{J}+\nabla\times\vec{M}$$
$$\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right) = \vec{J}$$
$$H \stackrel{\Delta}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M} \qquad \left[{Amp}/{m}\right] \quad , \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{J}$$

یعنی کرل بردار $\vec{H}$ که به آن شدت میدان مغناطیسی گفته می شود تنها وابسته جریانهای حقیقی است شکل انتگرالی رابطه اخیر بصورت:

$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = I_{total} = \int_s \vec{J}.d\vec{s}$$

از طرفی در محاسبه دیورژانس شدت میدان مغناطیسی

$$\nabla.\vec{H} = \nabla.\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right) = \frac{1}{\mu_0}\nabla.\vec{B}-\nabla.\vec{M} = 0-\nabla.\vec{M}$$

یعنی دیوژانس $\vec{H}$ تابع وضعیت مغناطیسی جسم $(\vec{M})$ می باشد اما در عمل در بسیاری از مسائل $\nabla.\vec{M}=0$ خواهد بود و بنابراین $\nabla.\vec{H}=0$

صفر بودن $\vec{H}$ یا $(\vec{M})$ نشان دهنده یکنواختی $\vec{M}$ (یا $\vec{H}$) است و اینکه خطوط میدان از نقطه ای شروع و یا به نقطه ای ختم نمی شود و بعبارتی با رمغناطیسی وجود ندارد.

رابطه بین $\vec{M}$ و $\vec{H}$ در اجسام غیر مغناطیسی (مواد پارامگنتیک و دیامگنیتک) خطی است اما در مواد فرومگنتیک به جز در مقادیر کوچک غیر خطی است.

$$\vec{M} = X_m\vec{H}$$

X_m ضریب تأثیرپذیری مغناطیسی (Magnetic Susceptibility) می گویند که تعیین کننده میزان وضعیت مغناطیسی در اثر اعمال مقدار معین $\vec{H}$ است که بطور تجربی بدست می آید.

می دانیم که:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$$

و یا:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}$$
$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}+\mu_0 X_m\vec{H} = \mu_0(1+X_m)\vec{H}$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

که در آن

$$\mu = \mu_0(1+X_m) = \mu_0\mu_r$$
$$_r = 1 + X_m$$

μ ضریب نفوذپذیری مغناطیسی مطلق absolute permeability

μ_r ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی نسبی relative permeability

در اجسام دیامگنیتک μ_r کوچکتر از یک و نزدیک به یک است (و X_m آن عدد منفی خیلی نزدیک به صفر)

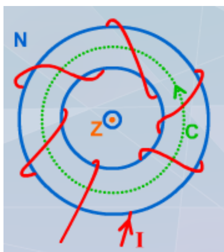
در اجسام پارامگنیک μ_r بزرگتر از یک و نزدیک به یک است (و X_m آن عدد مثبت و خیلی نزدیک به صفر)

اما در اجسام فرومگنتیک μ_r خیلی بزرگتر از یک (بین ۳۰۰ تا ۳۰۰۰ یا حتی بیشتر) است که بستگی به میزان H دارد.

بعنوان مثال: μ_r برای بیسموت بعنوان یک ماده دیامگنتیک $\mu_r = 0.99983$

μ_r برای آلومینیم بعنوان یک ماده پارامگنتیک $\mu_r = 1.00002$

مثال: یک سیم پیچ حلقوی که دارای N دور سیم یکنواخت دور هسته آهنی بطول متوسط lمتر و مقطع دایره ای شکل به سطح S متر مربع پیچیده شده، جریان I عبور می کند مطلوبست شدت میدان مغناطیسی و چگالی در نقاط داخل هسته، چنانچه ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هسته μ باشد.



$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = \int_s \vec{J}.d\vec{s}$$

$$H\ell = NI \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{NI}{\ell}\hat{a}_\varphi$$

چنانچه از طول متوسط استفاده نشود:

$$H2\pi r = NI$$

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

برای محاسبه کل:

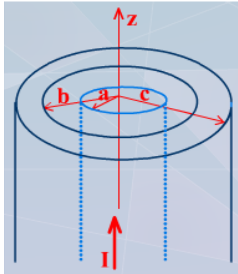
$$\phi = \int_s \vec{B}.d\vec{s} = BS$$

$$\phi = \frac{\mu NIS}{2\pi r}$$

S سطح مقطع هسته است که فلو از آن عبور مي كند .

مثال: حول یک سیم که از آن جریان یکنواخت I عبور می کند و دارای مقطع دایره ای بشعاع a است و در جهت z+ قرار گرفته استوانه تو خالی از جسم مغناطیسی با $\mu_r = 100$ قرار دارد به نحوی که محور استوانه مغناطیسی و سیم حامل جریان محور zهاست. شعاع داخلی و خارجی استوانه به ترتیب b و c می باشد (c>b). مطلوبست محاسبه $\vec{M}, \vec{B}, \vec{H}$ در داخل

جسم مغناطیسی و چگالی جریانهای مغناطیسی بر حسب I,c,b,a برای منحنی بسته c دایره ای به شعاع r و b<r<c



$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = \int_s \vec{J}.d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad 2\pi r H = I$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \frac{100\mu_0 I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \frac{99I}{2\pi r}\hat{a}_\varphi$$

$$\vec{J}_m = \nabla\times\vec{M} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\varphi r & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\frac{99I}{2\pi r} & 0 \end{vmatrix}$$

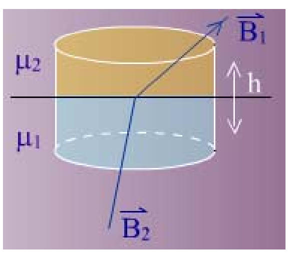
$$\vec{J}_{ms} = \vec{M}\times\hat{n}$$

$$r = b: \quad \vec{J}_{ms} = \left(\vec{M}\times\hat{n}\right)\Big|_{r=b} = \frac{99I}{2\pi b}\hat{a}_\varphi \times(-\hat{a}_r) = \frac{99I}{2\pi b}\hat{a}_z$$

$$r = c: \quad \vec{J}_{ms} = \left(\vec{M}\times\hat{n}\right)\Big|_{r=c} = \frac{99I}{2\pi b}\hat{a}_\varphi \times(\hat{a}_r) = -\frac{99I}{2\pi b}\hat{a}_z$$

شرایط مرزی برای میدان های مغناطیسی

در شرایط واقعی و عملی عموماً با چند ناحیه (جسم) در تماس با هم و با سطح مشترک مواجه هستیم.



$$\nabla.\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \nabla.\vec{B}dv = 0$$

$$\oint_s \vec{B}.d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \vec{B}_1.d\vec{s}_1}_{\text{قاعده پائین}} + \underbrace{\int \vec{B}_2.d\vec{s}}_{\text{قاعده بالا}} + \underbrace{\int \vec{B}.d\vec{s}}_{\text{سطح جانبی}} = 0$$

$$\vec{B} = \vec{B}_n + \hat{B}_t$$

چون $h \to 0$ بنابراین:

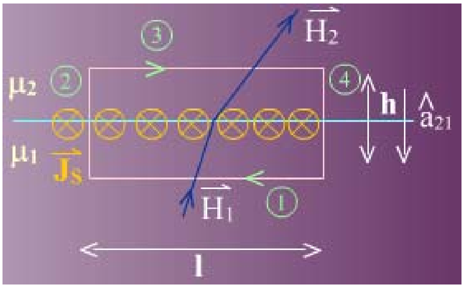
$$B_{1n}\Delta S + B_{2n}\Delta S \quad 0 \quad 0$$
$$B_{1n} = B_{2n}$$

و نیز

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad \Rightarrow \quad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_{r_2}}{\mu_{r_1}}$$

با توجه به $\vec{M} = \dfrac{B}{\mu_0} - \vec{H}$ مولفه های عمودی M نیز در هر دو ناحیه با هم برابر نمی باشند.

برای مولفه های مماسی:



چنانچـه بـین دو محـیط جریـان حقیقـی سـطحی $\vec{J}_s$ عمـود بـر صـفحه و در جهـت داخـل صفحه روی سطح مشترک جاری باشد

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \int_s \nabla \times \vec{H}.d\vec{s} = \int_s \vec{J}.d\vec{s} \quad \Rightarrow$$
$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = \int_1 \vec{H}.d\vec{l}_1 + \int_2 \vec{H}.d\vec{l} + \int_3 \vec{H}_2.d\vec{l} + \int_4 \vec{H}.d\vec{l}$$

دو انتگرال صفر می شود.

$$= -H_{1t}\ell + 0 + H_{2t}\ell + 0 = \left(H_{2t} - H_{1t}\right)\ell$$

انتگرال J روی سطح به انتگرال خطی بطول ℓ تبدیل می شود.

$$\int_s \vec{J}.d\vec{s} = J_s \ell$$

بنابراین

$$\left(H_{2t} - H_{H}\right)\ell = J_s \ell \quad \Rightarrow \quad H_{2t} - H_{1t} = J_s$$
$$\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) \times \hat{a}_{21} = \vec{J}_s$$

و یا

$$\hat{a}_{21} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J}_s$$

$\hat{a}_{21}$ برداری که عمود بر سطح مشترک از محیط ۲ بطرف محیط ۱ است.

چنانچه جریان سطحی بین دو محیط وجود نداشته باشد: $H_{1t} = H_{2t}$

مدارهای مغناطیسی و مقاومت مغناطیسی

در یک مدار یا سیستم مغناطیسی سیم پیچ حلقوی ملاحظه شد که:

$$\vec{H} = \frac{NI}{\ell}\hat{a}_{\varphi}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
$$\vec{B} = \frac{\mu NI}{\ell}\hat{a}_{\varphi}$$
$$\phi = BS = \frac{\mu NIS}{\ell}$$

می توان فلوی عبور کرده از هسته را به این صورت مرتب نمود: $= \dfrac{NI}{\ell / \mu s}$

با کمی دقت می توان رابطه فوق را به مشابه قانون اهم $\left(I = \dfrac{V}{R}\right)$ در میدان الکتریک در نظر گرفت به نحوی که ϕ همانند I و NI همانند V که emf مدار الکتریکی است، تلقی نمود و یا بعبارتی NI بصورت نیروی محرکه مغناطیسی magnetomotive force یا mmf برای یک مدار مغناطیسی که فلوی ϕرا به داخل مقاومت مغناطیسی بنام رلکتانس Reluctance جاری می کند.

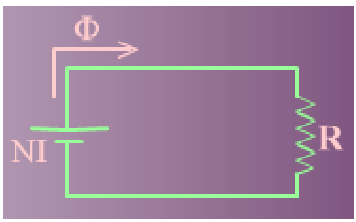
$$R = \text{Reluctance} = \frac{\ell}{\mu s}$$

(مشابه $R = \dfrac{\ell}{\delta S}$ مقاومت الکتریکی)

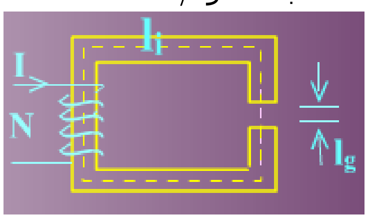
مدار معادل مغناطیسی بصورت شکل زیر در خصوص سیستم های (مدارهای) مغناطیسی در نظر گرفت که تمام قوانین مدار الکتریکی در آن صادق است از جمله KCL و KVL.

واحد mmf آمپر دور، واحد مقاومت مغناطیسی $1/H$ است.

جهت منبع NI با توجه به جهت $\vec{B}$ در هسته تعیین می شود به نحوی که ϕ از قطب مثبت منبع خارج می شود:



مثال: در مدار روبرو مطلوبست محاسبه B و ϕ



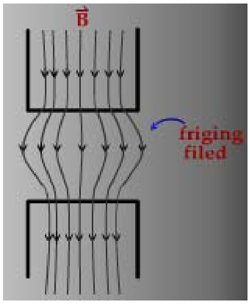
μ_r = ضریب نفوذپذیری نسبی هسته

ℓ_i = طول متوسط هسته (طول موثر هسته) Effective length

ℓ_g = طول فاصله هوائی (air gap)

$\ell_g << \ell_i$ S =سطح مقطع هسته

بدلیل آنکه طول فاصله هوائی خیلی کوچکتر از طول هسته است و یا ضخامت هسته آهنی خیلی بزرگتر از فاصله هوائی است، می توان از فوران میدان مغناطیسی fringing field صرفنظر کرد یعنی خطوط $\vec{B}$ که از هسته خارج می شوند انحرافی پیدا نمی کنند و صرفاً بطور عمود از هسته خارج و پس از طی فاصله هوائی دوباره وارد هسته آهنی می شوند.



$$B_i \simeq B_g = B_n = B$$

$$H_g = \frac{B}{\mu_0}, H_i = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

برای یک مسیر بسته که قسمتی از آن فاصله هوائی عبور می کند.

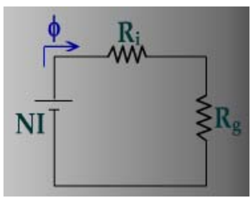
$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = \int_s \vec{J}.d\vec{s}$$

$$\int_{c_i} \vec{H}_i.dl + \int_{c_g} \vec{H}_g.d\vec{l} = NI$$

$$\frac{B}{\mu_0}\ell_g + \frac{B}{\mu_0\mu_r}\ell_i = NI \quad \Rightarrow \quad B = \frac{NI}{\dfrac{\ell_g}{\mu_0} + \dfrac{\ell_i}{\mu_0\mu_r}}$$

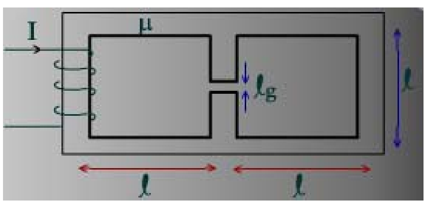
$$\phi = BS \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{NI}{\dfrac{\ell_g}{\mu_0 S} + \dfrac{\ell_i}{\mu_0\mu_r S}} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{NI}{R_g + R_i}$$

$$R_g = \frac{\ell_g}{\mu_0 S} \quad , \quad R_i = \frac{\ell_i}{\mu_0\mu_r S}$$

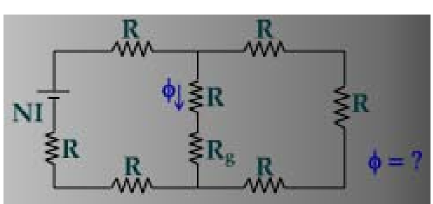


عموماً با توجه به مقادیر کمیتها $R_g >> R_i$ است.

تمرین: چنانچه شکل روبرو برشی از یک مدار مغناطیسی باشد، مطلوبست چگالی فلوی میدان مغناطیسی در فاصله هوائی برحسب پارامترهای مدار و مدار مغناطیسی.

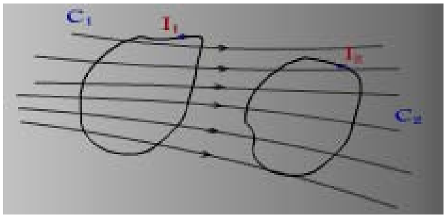


راهنمایی: مدار مغناطیسی بصورت زیر بدست می آید.



خود القاء و القاء متقابل Self Inductance & mutual Inductance

دو مدار c_1 و c_2 که بترتیب جریان I_1 و I_2 از آنها عبور می کند و در مجاور یکدیگر هستند را در نظر بگیرید.



هر یک از دو مدار (حلقه) به ترتیب دارای سطوح S_1 , S_2 می باشند.

اگر $\vec{B}_1$ چگالی فلوی مغناطیسی ایجاد شده توسط مدار c_1 ناشی از جریان I_1 باشد.

فلوی مغناطیسی بوجود آمده از مدار ۱ که از سطح s_1 عبور می کند (قطع می کند)

$$\phi_{11} = \int_{s_1} \vec{B}_1 . d\vec{s}_1$$

فلوی مغناطیسی بوجود آمده از مدار ۱ که از سطح s_2 عبور می کند (قطع می کند)

$$\phi_{12} = \int_{s_2} \vec{B}_1 . d\vec{s}_2$$

اگر مدار ۱و ۲ بترتیب شامل N_1 و N_2 دور باشند.

کل فلوی پیوند شده در مدار C_1 توسط $\vec{B}_1$ flux linkage $= \psi_{11} = N_1\phi_{11}$

کل فلوی پیوند شده در مدار C_2 توسط $\vec{B}_1$ flux linkage $= \psi_{12} = N_2\phi_{12}$

طبق تعریف:

خود القاء (Self Inductance) = (کل فلوی عبور ازخود سلف)/(عامل جریان فلوی تولیدی) $\quad L_{11} \triangleq \dfrac{\psi_{11}}{I_1}$

القاء متقابل (Mutual Inductance) = (کل فلوی عبور از سلف مجاور)/(عامل جریان فلوی تولیدی) $\quad L_{12} \triangleq \dfrac{\psi_{12}}{I_1}$

و بهمین ترتیب برای مدار ۲

$$\phi_{22} = \int_{s_2} \vec{B}_2 . d\vec{s}_2 \quad , \quad \phi_{21} = \int_{s_1} \vec{B}_2 . d\vec{s}_1$$

$$\psi_{22} = N_2\phi_{22} \quad , \quad \psi_{21} = N_1\phi_{21}$$

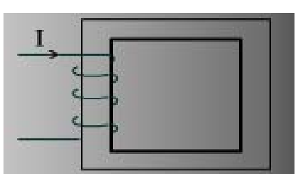
$$L_{22} = \frac{\psi_{22}}{I_2} \quad , \quad L_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_2}$$

این تعاریف برای محیط های خطی و میدانهاي ساکن و یا میدانهای با تغییرات زمانی آهسته (نیمه ساکن) صادق است.

اما تعریف کامل:

$$L_{11} = \frac{d\psi_{11}}{dI_1} \quad , \quad L_{12} = \frac{d\psi_{12}}{dI_1}$$

مثلاً برای یک سیم پیچ شامل N دور سیم و با هسته مسدود:



L= طول موثر هسته

A= سطح مقطع هسته

B= چگالی فلوی میدان مغناطیسی در هسته ناشی از عبور جریان I

$$\phi = AB$$

$$d\phi = AdB$$

$$\psi = N\phi \quad \Rightarrow \quad d\psi = Nd\phi = NAdB$$

$$NI = \ell H$$

$$NdI = \ell dH \quad \Rightarrow \quad dI = \frac{\ell}{N} dH$$

$$L = \frac{d\psi}{dI} = \frac{NAdB}{\ell / N \, dH} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N^2 A}{\ell} \frac{dB}{dH}$$

چنانچه هسته دارای پرمبیلیته خطی باشد (μ ثابت باشد) و یا بعبارتی محیط خطی باشد

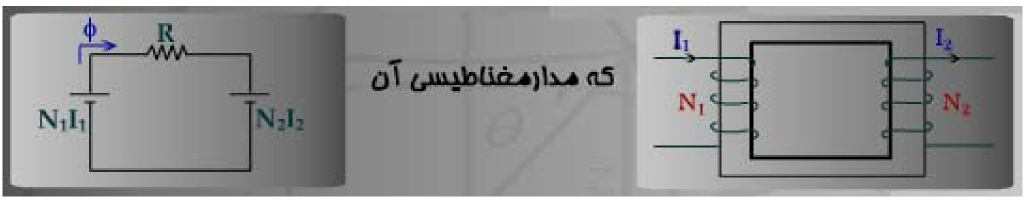
$$\frac{dB}{dH} = \mu$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{N^2 A\mu}{\ell}$$

از طرفی رلکتانس هسته $R = \frac{\ell}{\mu A}$ بنابراین:

$$L = \frac{N^2}{\ell / \mu A} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N^2}{R}$$

چنانچه بر روی هسته مثال قبل سیم پیچ دومی پیچیده شود:



در مدار مغناطیسی داریم: $\phi R = N_1 I_1 - N_2 I_2$

اگر هسته ایده آل (ترانسفورماتور ایده آل) باشد:

$$\mu \to \infty$$

در نتیجه

$$R = \frac{\ell}{\mu A} = 0$$

یا بعبارتی

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{و یا} \quad N_1 I_1 = N_2 I_2$$

اگر $I_2 = 0$ باشد:

$$B_1 = \mu H = \frac{\mu N_1 I_1}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \phi_{11} = B_1 S = \frac{\mu N_1 I_1 A}{\ell}$$

$$\psi_{11} = N_1 \psi_{11} \quad \Rightarrow \quad L_{11} = \frac{\psi_{11}}{I_1} = \frac{\mu N_1^2 A}{\ell} \quad \Rightarrow \quad L_{11} = \frac{N_1^2}{R}$$

که همان نتیجه قبل است. همچنین

$$\phi_{12} = B_1 A \quad , \quad \psi_{12} = N_2 \phi_{12}$$

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 A}{\ell} \quad \Rightarrow \quad L_{12} = \frac{N_1 N_2}{\ell}$$

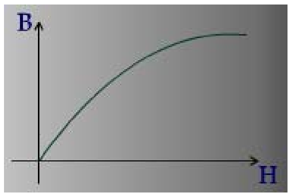
و چنانچه $I_1 = 0$ باشد:

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{R} \quad , \quad L_{21} = \frac{N_1 N_2}{R} = L_{12}$$

ملاحظه می شود که خود القاء و القاء متقابل صرفاً وابسته به مشخصات فیزیکی قطعات هستند و مستقل از پارمترهای الکتریکی و میدانی مغناطیسی که مشابه ظرفیت یک خازن است.

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

همانگونه که مشخص شد با اعمال جریان به یک مدار (سیم پیچ) ایجاد میدانی مغناطیسی به چگالی فلوی مغناطیسی $\vec{B}$ می نماید در واقع اعمال I ایجاد $\vec{H}$ و آن به نوبه خود $\vec{B}$ را بوجود می آورد ارتباط B به H از طریق منحنی مربوطه مشخص می شود.



این منحنی در مقادیر بزرگ جریان به حالت اشباع می رود.

شیب منحنی $\frac{dB}{dH}$ ضریب نفوذ پذیری را نتیجه خواهد داد که در مقادیر کم B و H رابطه خطی دارند و شیب ثابت است.

در اثر تغییر جریان نسبت به زمان ، ولتاژی القاء می شود که از رابطه قانون فارادی بدست می آید:

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

می دانیم که:

$$\psi = N\phi \quad , \quad \phi = BA \quad , \quad i = \frac{H\ell}{N} \quad \text{و یا} \quad H = \frac{Ni}{\ell}$$

بنابراین ولتاژ منبع مورد نیاز

$$V = \frac{d\psi}{dt} = NA\frac{dB}{dt}$$

از طرفی توان گرفته شده از منبع $P = Vi$ است بنابراین:

$$P = NA\frac{dB}{dt} \times \frac{H\ell}{N}$$

$$P = A\ell H\frac{dB}{dt}$$

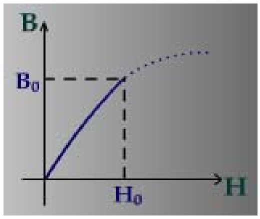
$$dw_m = pdt = A\ell HdB$$

$$w_m = \int dw_m = \int A\ell HdB = A\ell \int HdB$$

$$w_m = \int HdB \qquad \left[{}^{Joul}/_{m^3}\right]$$

انرژی ذخیره شده مغناطیسی $A\ell$ حجم هسته مغناطیسی است بنابراین چگالی انرژی مغناطیسی یعنی w_m سطح محصور بین منحنی و خط B_0 و محور Bهاست.

چنانچه محیط خطی باشد و $B = \mu H$



$$w_m = \int_0^{B_0} H dB = \int_0^{B_0} \frac{B}{\mu} dB$$

$$w_m = \frac{1}{2\mu} B_0^2$$

$$w_m = \int_0^{H_0} \mu H dH = \frac{1}{2}\mu H_0^2 = \frac{1}{2} B_0 H_0$$

برای مقدار B و H در ناحیه خطی $w_m = \frac{1}{2}\vec{B}.\vec{H}$

و کل انرژی $W_m = \int_V w_m dv = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}.\vec{H} dv'$

رابطه دیگر:

$$\psi = LI$$

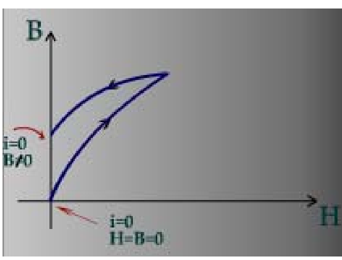
$$W_m = \int p dt = \int VI dt = \int \frac{d\psi}{dt} I dt = \int \frac{d(LI)}{dt} I dt$$

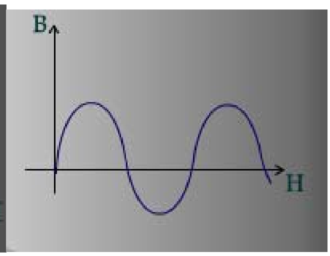
$$W_m = \int LI dI \quad \Rightarrow \quad W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

که شکل پارامتری مداری W_m است.

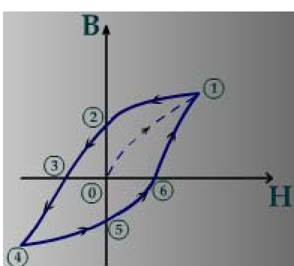
منحنی پسماند مغناطیسی Hysteresis

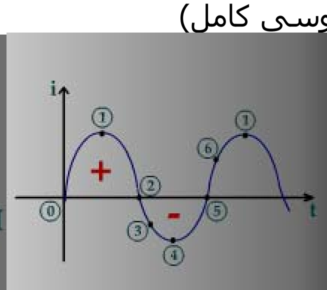
چنانچه جریان اعمالی به یک سیم پیچ را از مقدار صفر افزایش دهیم و به مقدار مشخصی برسانیم و سپس جریان را کاهش دهیم، مسیر تغییر B نسبت به H در دو مرحله فوق یکی نمی باشد علت این موضوع پسماند مغناطیسی است که در سیستم (هسته مغناطیسی) بوجود می آید.





چنانچه این روند را ادامه دهیم بدین معنا که i در جهت منفی افزایس یابد (مشابه نیم سیکل منفی یک جریان سینوسی کامل)





و زمانهای مختلف را مطابق منحنی جریان i دنبال کنیم به حلقه ای می رسیم که در سیکلهای بعدی تکرار می شود.
می توان ثابت کرد که مساحت این حلقه برابر است با میزان انرژی تلف شده در واحد حجم هسته در واحد زمان. این تلفات، تلفات هستریس گویند. و این حلقه را حلقه هیستریس گویند. Hysteresis loop

نیروی میدان مغناطیسی

در این قسمت بدنبال محاسبه نیروئی خواهیم بود که در اثر یک تغییر مکان مجازی قابل محاسبه خواهد بود. محاسبه این نیرو از طریق تغییرات انرژی تعیین می گردد.

$$\Delta W = \vec{F}.\Delta\vec{L}$$

چنانچه سیستم بسته باشد بایستی

$$\Delta W + \Delta W_m = 0$$

بنابراین

$$\Delta W = -\Delta W_m = \vec{F}.\Delta\vec{\ell} = F\Delta\ell$$

($\Delta\ell$ تغییر مکان مجازی است)

و یا بعبارتی در تغییرات جزئی طول

$$F = -\frac{\Delta W_m}{\Delta\ell} = -\frac{dW_m}{d\ell}$$

بنابراین

$$\vec{F}\Big|_{\varphi=\text{ثابت}} = -\nabla W_m$$

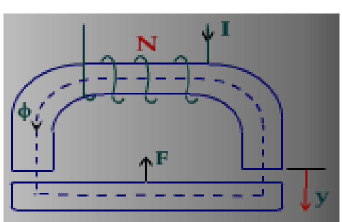
چنانچه مدار (سیستم) به منبع متصل باشد و یا بعبارتی سیستم باز باشد، هر گونه تغییر در انرژی می تواند از طریق منبع جریان متصل به مدار تأمین شود بنحویکه I ثابت بماند.

$$\Delta W = \Delta W_m$$

یعنی

$$\vec{F}\Big|_{I=\text{ثابت}} = +\nabla W_m$$

مثال: در مدار سیستم الکترومکانیکی نشان داده شده شکل که می تواند یک سیستم صنعتی جرثقیل یا کنتاکتور (رله)باشد دارای دو قسمت هسته آهنی و دو فاصله هوائی است چنانچه سیم پیچ آن دارای N دور باشد و جریان I ایجاد فلوی ϕ در مدار مغناطیسی کند مطلوبست محاسبه نیروی بالابر بر روی قسمت متحرک هسته آهنی (قسمت U شکل هسته ثابت است) S سطح مقطع هسته می باشد.



چنانچه قسمت متحرک هسته دارای جابجائی مجازی بمیزان dy باشد و فلوی ثابت بماند، در اثر تغییر در فاصله هوائی تغییر انرژی ایجاد شده، از طریق تغییر انرژی ذخیره شده مغناطیسی سیستم تأمین می گردد $\left(\Delta W = -\Delta W_m\right)$

تغییر انرژی مغناطیسی در دو فاصله هوائی عبارتند از:

$$dW = -dW_m = -2\times\left(\frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu_0}\right)Sdy$$

بنابراین

$$\vec{F} = -\nabla W_m = -\hat{a}_y\frac{B_0^2 S}{\mu_0} = -\hat{a}_y\frac{\phi_0^2}{\mu_0 S}$$

اگر در این مثال سیستم به یک منبع جریان ثابت I متصل می گردید، نیروی وارد بر قسمت متحرک هسته را بصورت زیر می توان بدست آورد.

در اثر جابجایی مجازی dy سبب تغییر فلوی بمیزان $d\phi$ و تغییر مقاومت مغناطیسی به اندازه dR می شود.

اما از طرفی

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad\Rightarrow\quad dW_m = \frac{1}{2}I^2 dL$$

$$\phi = \frac{NI}{R}$$

$$R = R_i + R_g$$

$$R_g = 2\times\frac{y}{\mu_0 S}$$

بنابراین

$$\phi = \frac{NI}{R_i + {2y}/{\mu_0 S}}$$

تغییرات R را می توان در L ملاحظه نمود:

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{N^2}{R_i + {2y}/{\mu_0 S}}$$

$$dL = N^2\frac{-2\,{dy}/{\mu_0 S}}{\left(R_i + {2y}/{\mu_0 S}\right)^2} = -\frac{2N^2 dy}{\mu_0 S\left(R_i + {2y}/{\mu_0 S}\right)^2}$$

$$dW_m = \frac{1}{2}\frac{-2N^2 I^2 dy}{\mu_0 S\left(R_i + {2y}/{\mu_0 S}\right)^2} = -\frac{1}{\mu_0 S}\left(\frac{NI}{R_i + {2y}/{\mu_0 S}}\right)^2 dy$$

$$dW_m = -\frac{1}{\mu_0 S}\phi_0^2 dy$$

$$\vec{F} = \nabla W_m = -\hat{a}_y\frac{\phi_0^2}{\mu_0 S}$$

که همان نتیجه قبل است.

فصل ششم

میدانهای متغیر با زمان Time-varying Fields

تا کنون میدانهای بررسی شده ساکن بودند یا بعبارتی نامتغیر با زمان. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن هیچگونه وابستگی به یکدیگر ندارد اما این موضوع در مورد میدانهایی که تغییرات زمانی دارند صادق نمی باشد. وابستگی متقابل و وجود همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان اجتناب ناپذیر است.

قانون فاراده Faraday

شاید بتوان گفت که اساس میدانهای متغیر با زمان بر پایه قانون فارادی نهاده شده است. بر طبق این قانون تغییرات زمانی فلوی میدان مغناطیسی ایجاد نیروی محرکه الکتریکی می کند که با عامل بوجود آورنده خود مخالف می کند یا بعبارتی:

$$e=-\frac{d\psi}{dt}$$

از طرفی

$$\psi=\int_s \vec{B}.d\vec{s}$$

تغییرات زمانی ψ می تواند ناشی از تغییرات زمانی $\vec{B}$ (یا عامل اصلی آن i) باشد یا ناشی از تغییرات زمانی سطح s باشد که ψ از آن عبور می کند و یا تغییرات توأم هر دو $(S,\vec{B})$

$$e=emf=\oint_c \vec{E}.d\vec{l}$$

در حالت اول

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}.d\vec{s}=\int_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.d\vec{s}$$

و یا (شکل انتگرالی قانون فارادی)

$$\oint_c \vec{E}.d\vec{l}=-\int_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.d\vec{s}$$

$$\int_s\nabla\times\vec{E}.d\vec{s}=-\int_s\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.d\vec{s}$$

$$\int_s\left(\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right).d\vec{s}=0\quad\Rightarrow\quad\nabla\times E+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

قانون اول ماکسول (شکل دیفرانسیلی قانون فارادی) $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

یعنی تغییرات زمانی میدان مغناطیسی، ایجاد میدان الکتریکی می کند.

در حالت دوم: سطح ds دارای تغییرات زمانی باشد.

یعنی اگر قطعه $d\vec{\ell}$ در مدت dt با سرعت $\vec{V}$ در میدان $\vec{B}$ حرکت کند:

$$d\vec{s}=\vec{V}dt\times d\vec{l}$$

میزان فلوئی که از این سطح در مدت dt می گذرد:

$$d\psi = \int_s \vec{B}.d\vec{s} \quad \oint_c \vec{B}.\vec{V}dt\times d\vec{l}$$

یا به عبارتی

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\oint_c \vec{B}.\left(\vec{V}\times d\vec{l}\right) = \oint_c \vec{B}.\left(d\vec{\ell}\times\vec{V}\right)$$

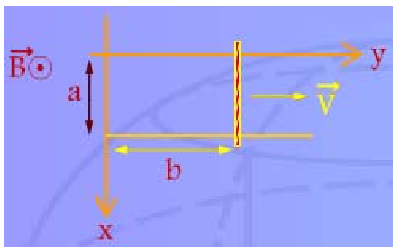
طبق روابط برداری:

$$e = \oint_c \left(\vec{V}\times\vec{B}\right).d\vec{\ell}$$

و یا بطور کلی (ترکیب دو حالت)

$$e = -\int_s \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.d\vec{s} + \oint_c \left(\vec{V}\times\vec{B}\right).d\vec{\ell}$$

مثال: محاسبه ولتاژ القائی در مداری که در میدان مغناطیسی متغیر با زمان $\vec{B} = \hat{a}_z B_0 \cos\omega t$ قرار دارد و قسمتی از آن با سرعت $\vec{V} = v_0\hat{a}_y$ حرکت می کند.



$$d\vec{s} = \hat{a}_z dxdy \quad , \quad d\vec{\ell} = dx\hat{a}_x$$

$$\begin{aligned} e &= -\int_s \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.d\vec{s} + \oint_c \vec{V}\times\vec{B}.d\vec{\ell} \\ &= -\int_s \left(-\hat{a}_z B_0\omega\sin\omega t\right).\left(\hat{a}_z dxdy\right) + \int_a^0 v_0\hat{a}_y \times \hat{a}_z B_0\cos\omega t.dx\hat{a}_x \\ &= B_0\omega ab\sin(\omega t) - av_0B_0\cos\omega t \end{aligned}$$

جریان جابجائی Displacement current

در میدان الکتریکی ساکن از تغییرات زمانی صرفنظر شد و حالت ماندگار را در نظر گرفتیم

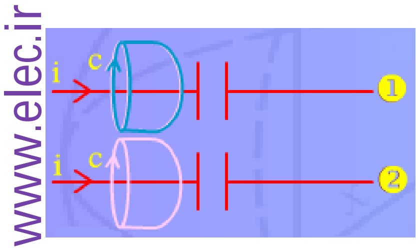
$$\nabla.\vec{J} = 0$$

اما می دانیم که (اصل بقاء بار الکتریکی)

$$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

از طرفی می دانیم $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$

برای یک سیستم (مدار) خازنی که جریان i از مدار می گذرد



برای سیستم ۱

$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = I_{total} \quad \Rightarrow \quad H2\pi r = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 0$$

برای سیستم ۲

$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = I_{total} \quad \Rightarrow \quad H2\pi r = i \quad \Rightarrow \quad H = \frac{i}{2\pi r}$$

برای رفع تناقض بایستی

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D$$

که $\vec{J}_D$ نامشخص است اما:

$$\nabla.\left(\nabla \times \vec{H}\right) = \nabla.\left(\vec{J} + \vec{J}_D\right)$$
$$0 = \nabla.\vec{J} + \nabla.\vec{J}_D$$

یا بعبارتی

$$\nabla.\vec{J}_D = -\nabla.\vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla.\vec{D}\right) = \nabla.\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$
$$\nabla.\left(\vec{J}_D - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

بدین معنی که تغییرات زمانی میدان الکتریکی، ایجاد میدان مغناطیسی می کند.

معادلات ماکسول

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla.\vec{D} = \rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla.\vec{B} = 0 \end{cases}$$