فصل اول(ادامه):

آنالیز برداری

انتگرال هایی شامل توابع برداری

۱

میدان:FIELD

میدان توزیع فضایی کمیتی(اسکالر یا بردار) است که می تواند تابعی از زمان باشد یا نباشد.

۲

INTEGRALS CONTAINING VECTOR FUNCTION

- در درس الکترومغناطیس با انتگرالهای شامل توابع برداری مواجه هستیم، همچون:

انتگرال حجمی(Fتابع برداری از فضا) $\int_V Fdv$

بردار dl بردار جز طول

انتگرال خطی(V تابعی اسکالر از فضا) $\int_C Vdl$

$\int_C F\ .dl$

دو انتگرال مقابل در واقع انتگرال عددی هستند.

$\int_S F\ .ds$

۳

انتگرال حجمی(Fتابع برداری از فضا)

$\int_V Fdv$

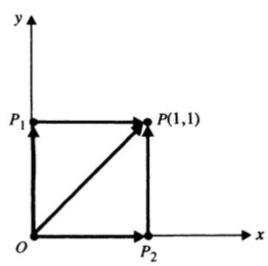
۴

انتگرال خطی(V تابعی اسکالر از فضا)

$$\int_C V dl$$

۵

EXAMPLE 2–13 Evaluate the integral $\int_O^P r^2\,d\mathbf{r}$, where $r^2 = x^2 + y^2$, from the origin to the point $P(1, 1)$: (a) along the direct path OP, (b) along the path OP_1P, and (c) along the path OP_2P in Fig. 2–20.

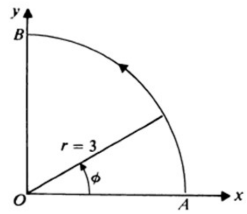


۶

EXAMPLE 2–14 Given $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y 2x$, evaluate the scalar line integral

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\ell$$

along the quarter-circle shown in Fig. 2–21.



۷

$$\int_C F \,.dl$$

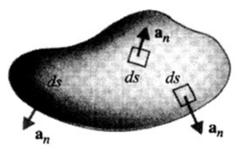
$$\int_S F \,.ds$$

۸

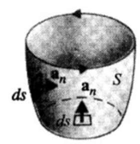
$$\oint_S A.ds$$

دایره کوچک بر روی انتگرال نماد بسته بودن سطح انتگرال گیری است.
همچنین مقدار و جهت بردار **ds** نیز به راحتی قابل تشخیص است.
|ds|در واقع همان جز دیفرانسیل سطح و جهت آن با برداری عمود بر سطح انتگرالگیری به دست می آید، به نحوی که:

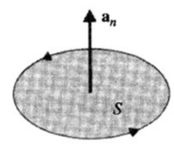
۱) در سطوح بسته همواره به سمت خارج سطح است
۲) در سطوح باز از جهت حاشیه سطح تبعیت می کند



(a) A closed surface.



(b) An open surface.



(c) A disk.

۹

EXAMPLE 2–15 Given $\mathbf{F} = \mathbf{a}_r k_1/r + \mathbf{a}_z k_2 z$, evaluate the scalar surface integral

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

over the surface of a closed cylinder about the z-axis specified by $z = \pm 3$ and $r = 2$.

۱۰

یادآوری:

میزان تغییریک میدان نرده ای درمکان $P = x_1 a_x + y_1 a_y + z_1 a_z$

با فرمول زیر بدست می آید:

$$\boxed{df = dx \frac{\partial f}{\partial x} + dy \frac{\partial f}{\partial y} + dz \frac{\partial f}{\partial z}}$$

با فرض ثابت بودن میدان با زمان(یا برای یک زمان معین) برای یک میدان عددی در هر نقطه از فضا حرکت در جهات مختلف منجر به کاهش ، افزایش و یا ثابت بودن آن کمیت خواهد شد.

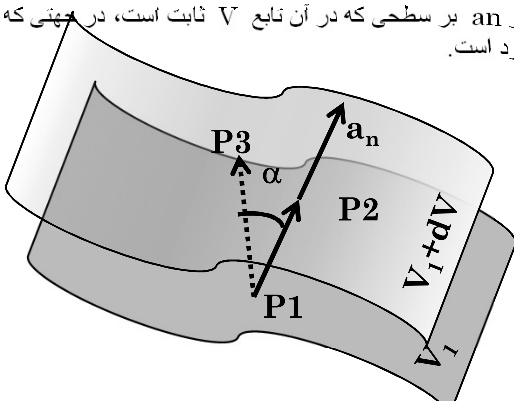
۱۱

Gradient of a scalar field
گرادیان یک میدان اسکالر

- گرادیان را به عنوان برداری که اندازه و جهت بیشترین نرخ افزایش میدان اسکالر در فضا را می دهد ، تعریف می کنند:

$$grad \quad V \triangleq a_n \frac{dV}{dn}$$

- ثابت می شود،در فرمول فوق بردار an بر سطحی که در آن تابع V ثابت است، در جهتی که بیشترین تغییرات را دارا باشد، عمود است.



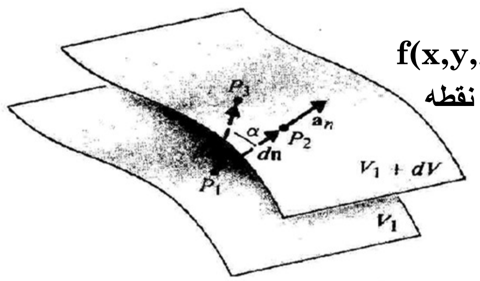
۱۲

گرادیان یک میدان اسکالر

o از نماد del یا ∇ برای نمایش گرادیان استفاده می شود. $\text{grad } f = \nabla f$

همچنین برای بدست آوردن مشتق جهت دار یک میدان اسکالر در نقطه ای از فضا ، در امتداد dl داریم:

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{dn}\frac{dn}{dl} = \frac{dV}{dl}.\cos\ \alpha$$
$$= \frac{dV}{dn} a_n . a_l = \nabla V . a_l$$



سوال:برای یک رویه در فضا $f(x,y,z)=c$ ثابت کنید که گرادیان تابع f در یک نقطه از رویه، بر سطح صفحه مماس بر رویه عمود است؟

۱۳

فرمول گرادیان میدان اسکالر در سایر دستگاه های مختصات

برای عملگر del یا ∇ در یک دستگاه مختصات با سه بردار پایه a_{u1} و a_{u2} و a_{u3} می توان از فرمول زیر استفاده نمود.

$$\nabla \equiv \left(a_{u_1} \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + a_{u_2} \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + a_{u_3} \frac{\partial}{h_3 \partial u_3} \right)$$

در فرمول فوق h1 و h2 و h3 ضرایب متری(Metric coefficient) نامیده می شوند، و برابر با ضریبی هستند که باید به تغییر دیفرانسیلی هر مختصه دستگاه ضرب شوند تا آن را به جنس طول تبدیل نماید.

به طور مثال : برای تبدیل $d\varphi$ در دستگاه مختصات استوانه ای به جنس طول باید آن را در r ضرب نمود در صورتی که در دستگاه مختصات کروی باید در $R\sin\theta$ ضرب شود، بنابراین :

دستگاه مختصات دکارتی: $h1=1, h2=1, h3=1$

دستگاه مختصات استوانه ای: $h1=1, h2=r, h3=1$

دستگاه مختصات کروی: $h1=1, h2=R, h3=R\sin\theta$

۱۴

فرمول گرادیان میدان اسکالر در سایر دستگاه های مختصات

دستگاه مختصات دکارتی

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

دستگاه مختصات استوانه ای

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

دستگاه مختصات کروی

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

۱۵

EXAMPLE 2–16 The electrostatic field intensity **E** is derivable as the negative gradient of a scalar electric potential V; that is, $\mathbf{E} = -\nabla V$. Determine **E** at the point (1, 1, 0) if

a) $V = V_0 e^{-x} \sin \frac{\pi y}{4}$,

b) $V = E_0 R \cos \theta$.

۱۶

۱۷

DIVERGENCE OF A VECTOR FIELD
دیورژانس یا واگرایی میدان برداری

- کمیتی را که مقدار و جهت دارد ، بردار نامیده می شود ، توزیع این کمیت در فضا را میدان برداری می نامند. به طور مثال: سرعت یک سیال، میدان جاذبه ای زمین، میدان مغناطیسی ناشی از آهن ربا
- مقدار انتگرال زیر شار A از طریق سطح s نامیده می شود.

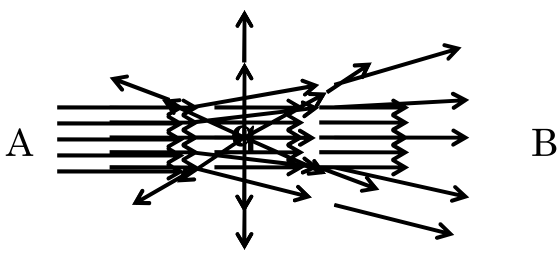
$$\int_{s} A.\mathrm{ds}$$

- ds دردو رابطه قبل بردار دیفرانسیل سطح است که قبلا مورد بحث قرار دادیم!
- شار یک میدان برداری متشابه جریان یک سیال غیر قابل تراکم است.

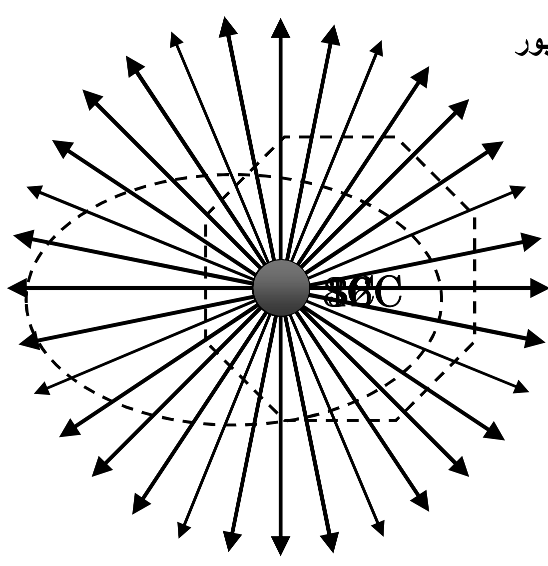
۱۸

خطوط شار FLUX LINES یا خطوط جریانیSTREAMLINES

- گاهی مناسب تر است تغییرات میدان را به صورت ترسیمی و با کمک خطوط جهت دار نمایش داد، این خطوط را خطوط شار یا خطوط جریانی نیز می نامند.



خطوط شار FLUX LINES یا خطوط جریانیSTREAMLINES



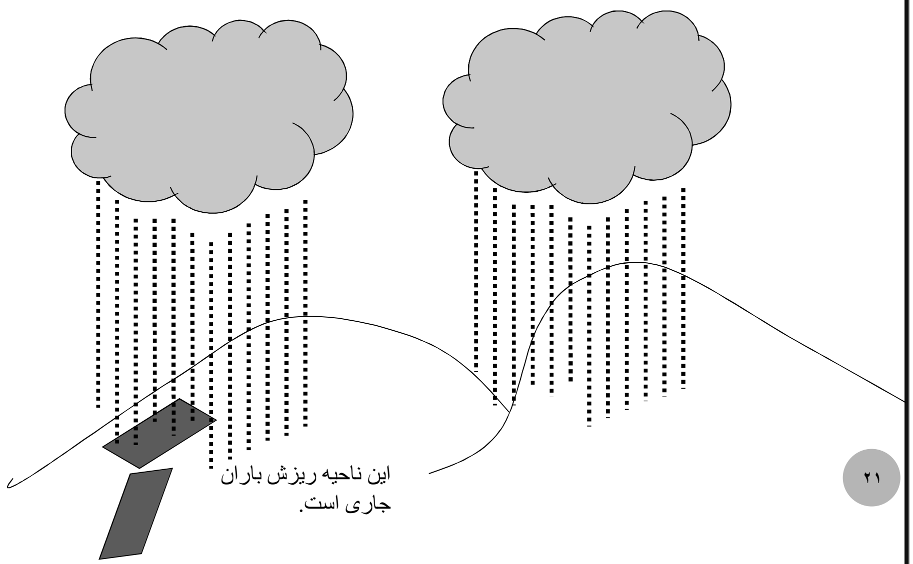
چند خط شار میدانی از سطح بسته عبور می کنند؟

$8C \Rightarrow 8$ lines

$16C \Rightarrow 16$ lines

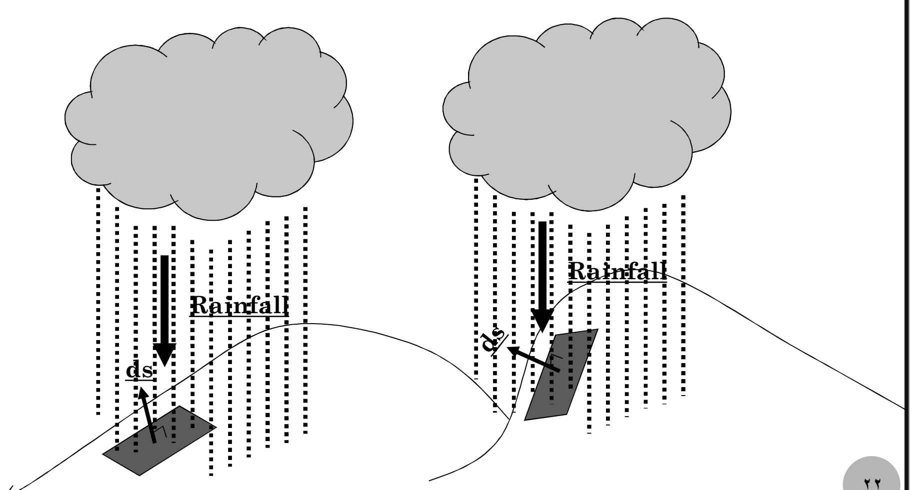
$32C \Rightarrow 32$ lines

تاثیر انحراف سطح انتگرال گیری

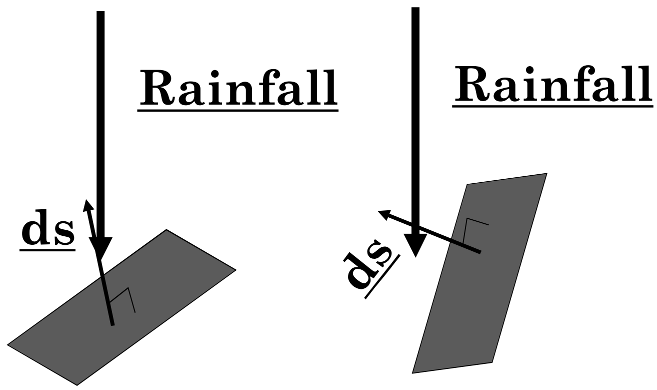


۲۱

چه رخ داده؟

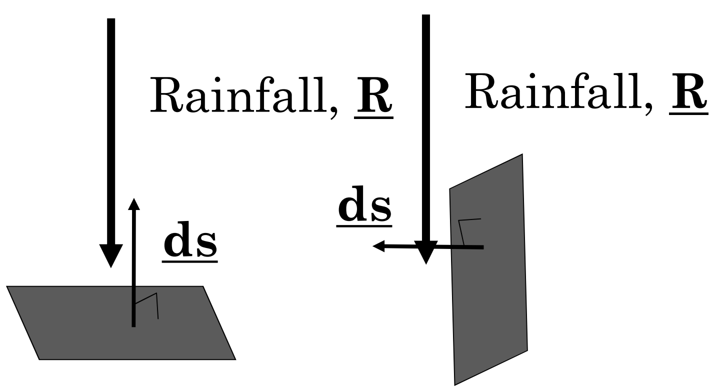


۲۲



واضح است: سطح ثابت است ولی زاویه بین باران و سطح تغییر نموده است.

۲۳



بیشترین شار عبوری در زاویه ۱۸۰ درجه و
کمترین(صفر) در زاویه ۹۰ درجه رخ داد!

۲۴

شار باران(ریزش باران) در سطحی به مساحت **ds**

- $Flux_{rain}$ = R.ds=شار باران
  - |R|×|ds|×cos(θ)
  - Rds cos(θ)
- $Flux_{rain}$ = 0 for 90° … cos(θ) = 0
- $Flux_{rain}$ = -Rds for 180° … cos(θ) = -1
- در حالت کلی: $Flux_{rain}$ = Rds cos(θ) ,
  - -1 < cos(θ) < +1

۲۵

DIVERGENCE OF A VECTOR FIELD
دیورژانس یا واگرایی میدان برداری

- **برای یک میدان برداری ، A، واگرایی به صورت زیر تعریف می شود:**

$$\nabla . A = divA = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s A.ds}{\Delta v}$$

- **دیورژانس یک میدان برداری ، یک مقدار اسکالر است.**
- **(دیورژانس میدان برداری در یک نقطه شار خالص خروجی در واحد حجم است ،اگر این حجم حول نقطه به صفر میل کند.)**

۲۶

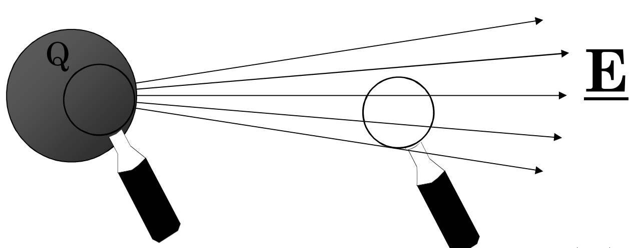
دیورژانس یا واگرایی میدان برداری

- در حجمی با یک سطح بسته، تنها وقتی شار اضافی ورودی یا خروجی وجود دارد که این حجم به ترتیب داری یک چاه یا منبع باشد.
- دیورژانس خالص مثبت ، وجود یک منبع سیال در داخل حجم و وجود دیورژانس منفی ، وجود یک چاه را مشخص می کند.
- دیورژانس یک میدان برداری سنجشی از قدرت منبع مولد شار آن میدان می باشد. این منبع به نام منبع فلوی (منبع جریان)flow source نیز نامیده می شود.
- Solenoidal field برای میدان برداری که دیورژانس آن صفر است، اصطلاح میدان سولونوئیدی یا غیر قابل تراکم مورد استفاده قرار می گیرد. در واقع در این حالت خطوط شار در یکدیگر بسته شده و دیگر منبع یا چاه ی وجود ندارد.

۲۷

معنای دیورژانس چیست؟

آیا معنی آن با کلمه DIVERGE یا از هم دور شدن یکی است؟

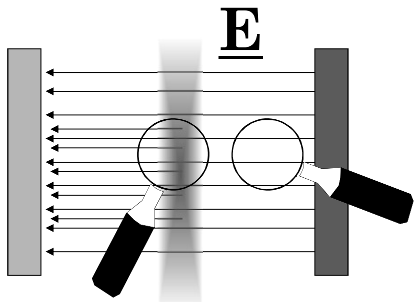


در این محل خطوط میدان از هم دور می شوند و همچنین دیورژانس صفر نیست. چرا که در این محل بار الکتریکی وجود دارد.$\rho>0$

در این محل، خطوط میدان از یکدیگر دور می شوند. ولی دیورژانس میدان نیز صفر است.چون منبع میدان یا بار موجود نیست.$\rho=0$

۲۸

معنای دیورژانس چیست؟
آیا معنی آن با کلمه DIVERGE یا از هم دور شدن یکی است؟

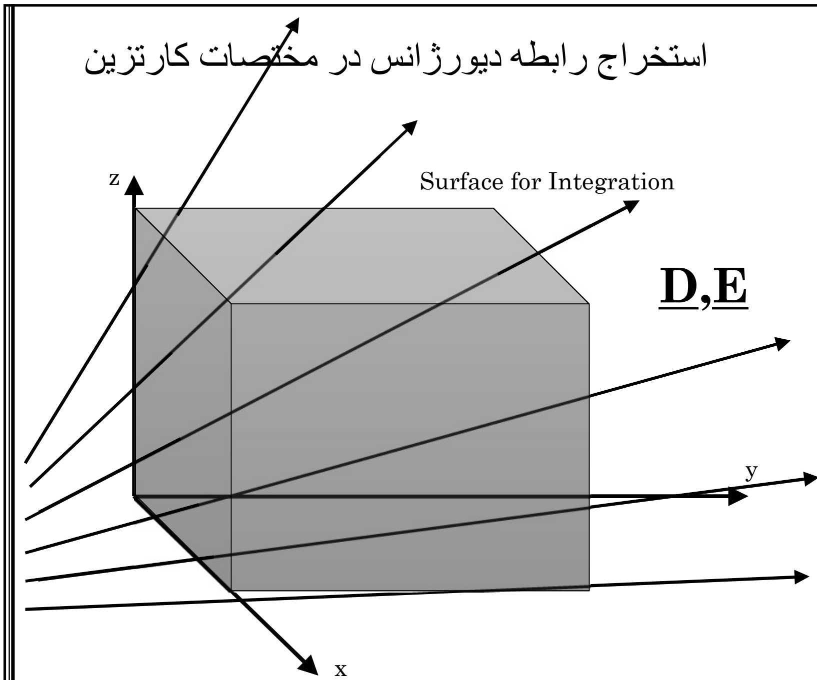


The electric field here does not diverge, and its DIVERGENCE is non-zero at this point, as there is charge present at the point, ρ>0.

The electric field does not diverge and its DIVERGENCE is zero at this point, as there is no charge present at the point, ρ=0.

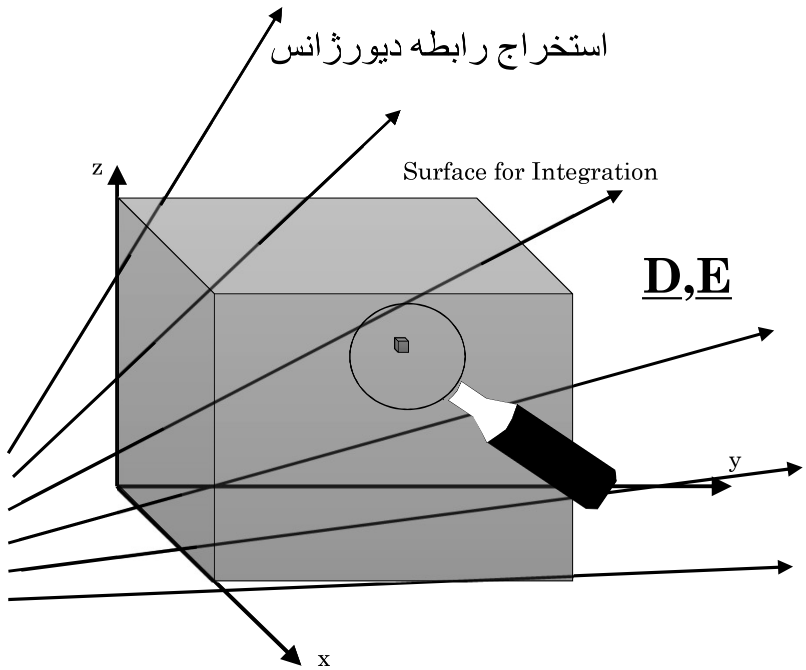
۲۹

استخراج رابطه دیورژانس در مختصات کارتزین



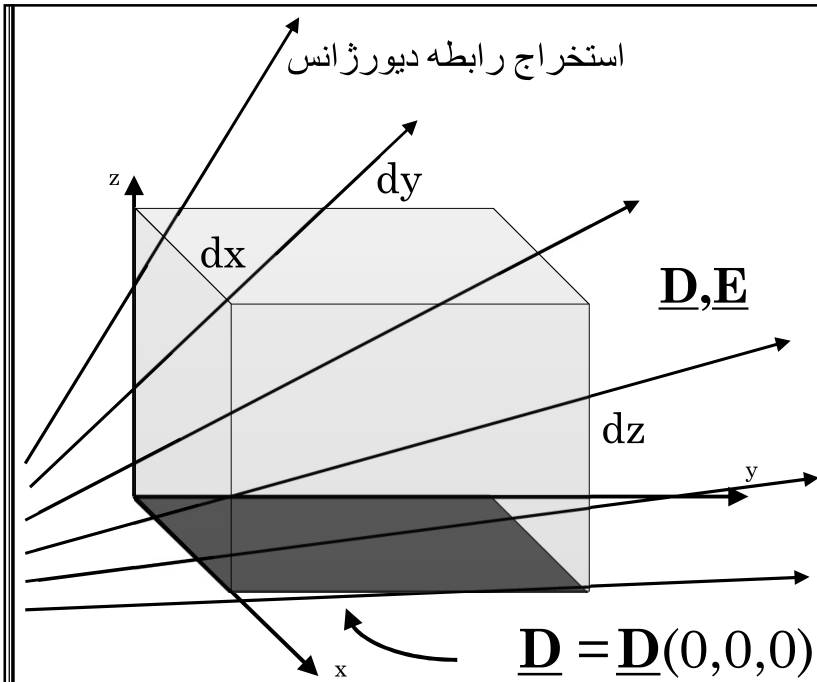
۳۰

استخراج رابطه دیورژانس



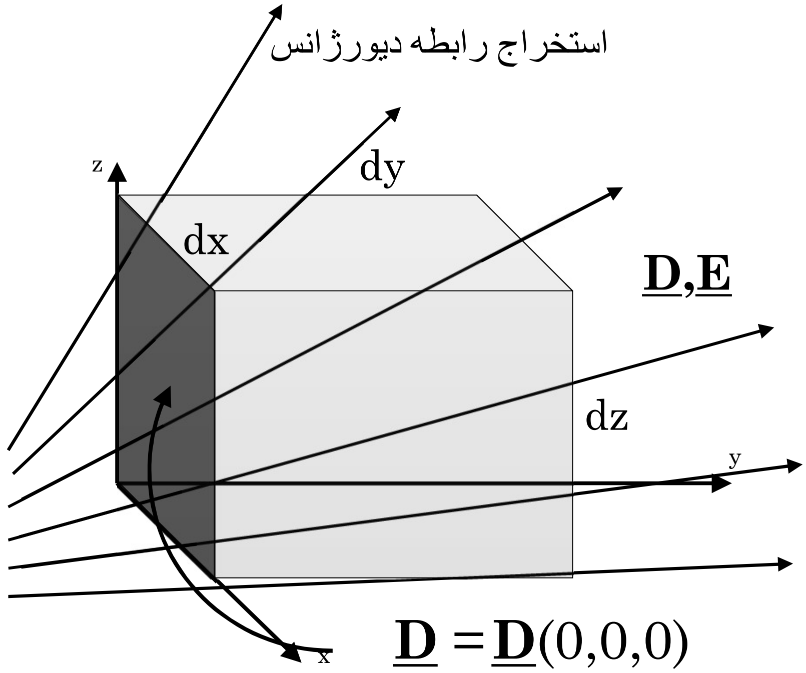
۳۱

استخراج رابطه دیورژانس



۳۲

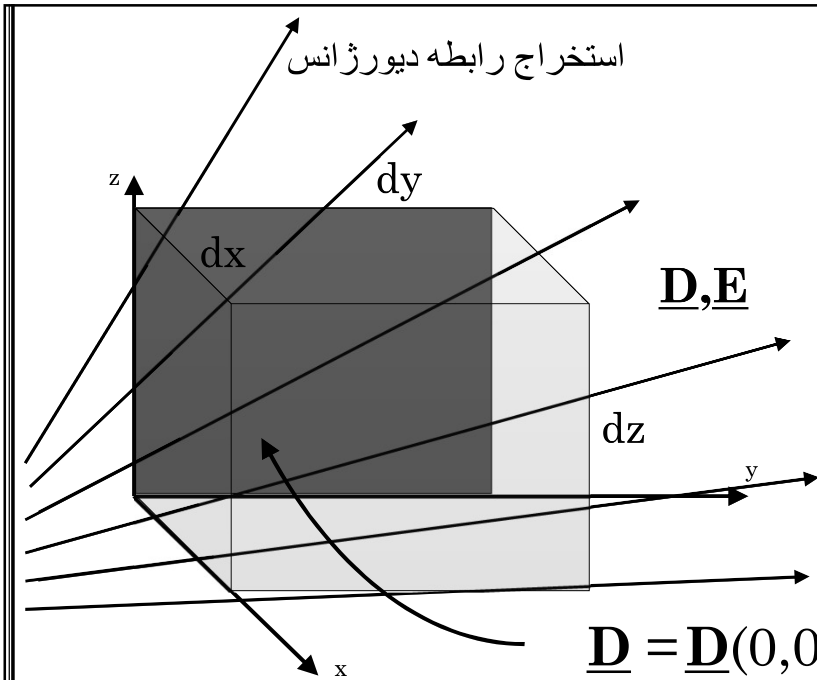
استخراج رابطه دیورژانس



$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}(0,0,0)$$

۳۳

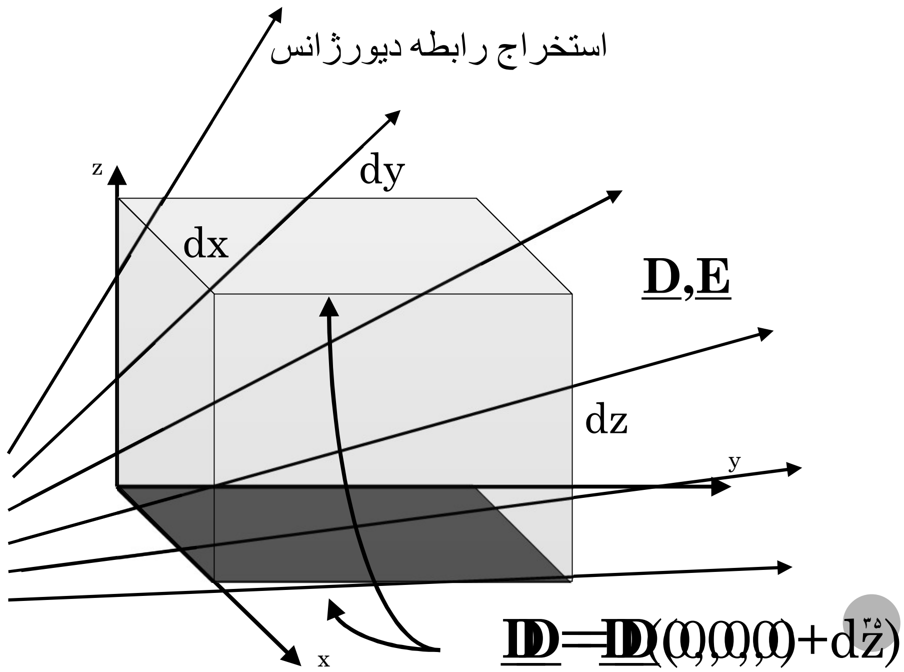
استخراج رابطه دیورژانس



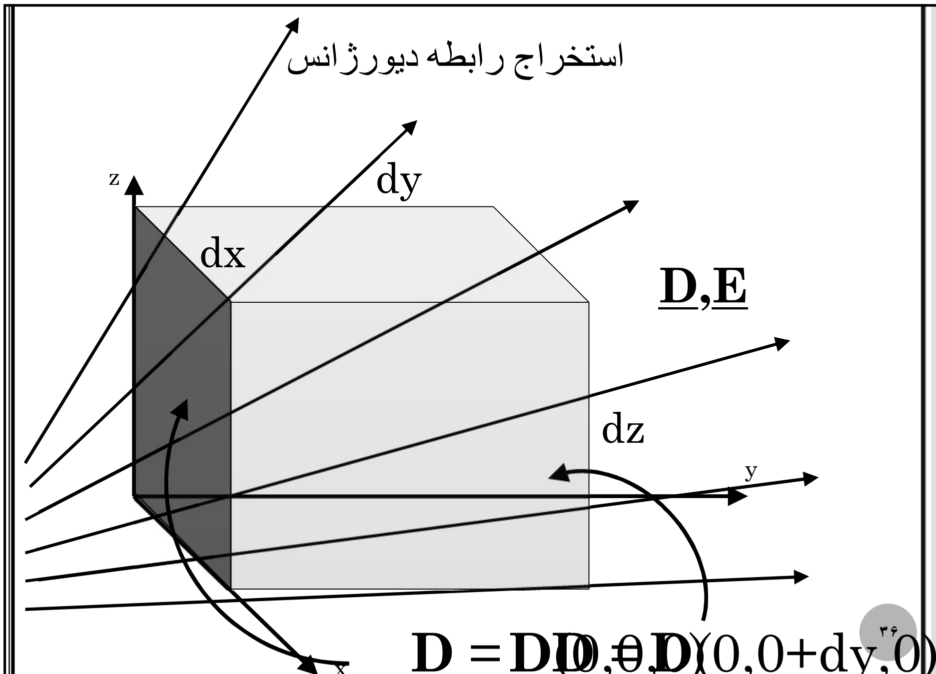
$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}(0,0,0)$$

۳۴

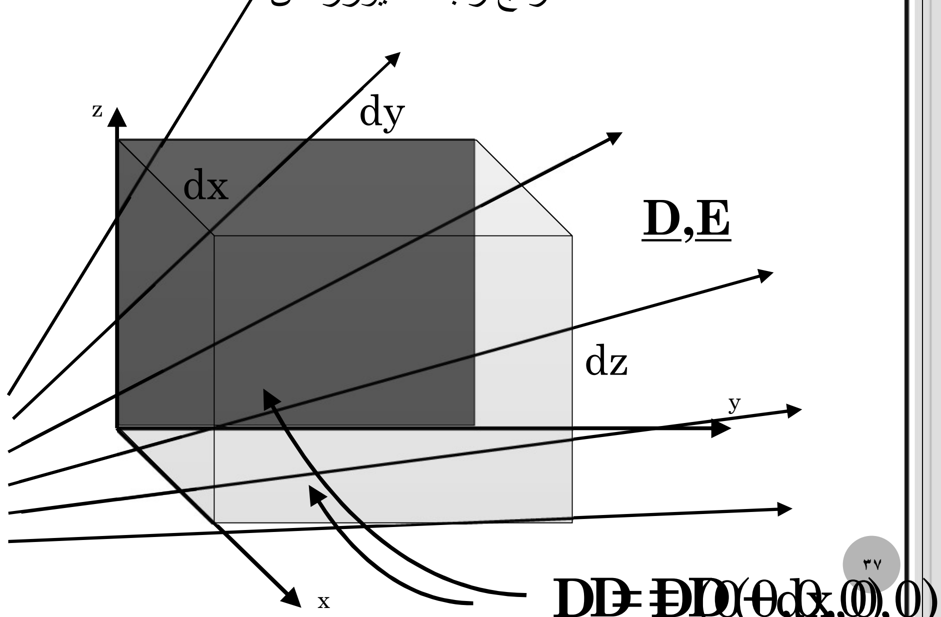
استخراج رابطه دیورژانس



استخراج رابطه دیورژانس



استخراج رابطه دیورژانس



۳۷

استخراج رابطه دیورژانس

- فرض کنید، روی تمام سطوحی که شامل مبدا می باشند،وجوه چپ ،پایین و پشت میدان برداری معادل باشد با $\underline{\mathbf{D}} = (D_x,D_y,D_z)$.
- **$\underline{\mathbf{D}}$روی سه وجه دیگر متفاوت است**
- Front face : $\underline{\mathbf{D}} = (D_x+\Delta x,D_y,D_z)$
- Right face : $\underline{\mathbf{D}} = (D_x,D_y+\Delta y,D_z)$
- Top face : $\underline{\mathbf{D}} = (D_x,D_y,D_z+\Delta z)$

۳۸

استخراج رابطه دیورژانس

- Left face : $\underline{\mathbf{D}} = (D_x, D_y, D_z)$
  - $\underline{\mathbf{ds}}$ = (0, -dxdz, 0)
- Right face : $\underline{\mathbf{D}} = (D_x, D_y+\Delta y, D_z)$
  - $\underline{\mathbf{ds}}$ = (0, +dxdz, 0)
- Bottom face : $\underline{\mathbf{D}} = (D_x, D_y, D_z)$
  - $\underline{\mathbf{ds}}$ = (0, 0, -dxdy)
- Top face : $\underline{\mathbf{D}} = (D_x, D_y, D_z+\Delta z)$
  - $\underline{\mathbf{ds}}$ = (0, 0, +dxdy)
- Back face : $\underline{\mathbf{D}} = (D_x, D_y, D_z)$
  - $\underline{\mathbf{ds}}$ = (-dydz, 0, 0)
- Front face : $\underline{\mathbf{D}} = (D_x+\Delta x, D_y, D_z)$
  - $\underline{\mathbf{ds}}$ = (+dydz, 0, 0)

۳۹

استخراج رابطه دیورژانس

- $$\int\int \underline{\mathbf{D}}.\underline{\mathbf{ds}} = (D_x,D_y,D_z).(0, -dxdz, 0) + (D_x,D_y,D_z).(0, 0, -dxdy) + (D_x,D_y,D_z).(-dydz, 0, 0) + (D_x+\Delta x,D_y,D_z).(dydz, 0, 0) + (D_x,D_y+\Delta y,D_z).(0, dxdz, 0) + (D_x,D_y,D_z+\Delta z).(0, 0, dxdy)$$

۴۰

استخراج رابطه دیورژانس

- $\iint \underline{\mathbf{D}}.\underline{\mathbf{ds}} = -D_y dxdz - D_z dxdy - D_x dydz$
  $+(D_x+\Delta x)dydz$
  $+(D_y+\Delta y)dxdz$
  $+(D_z+\Delta z)dxdy$
- $= -D_y dxdz - D_z dxdy - D_x dydz$
  $+(D_x+ dx\partial D_x/\partial x)\, dydz$
  $+(D_y+ dx\partial D_y/\partial y)dxdz$
  $+(D_z+ dx\partial D_z/\partial z)dxdy$

۴۱

استخراج رابطه دیورژانس

- $\iint \underline{\mathbf{D}}.\underline{\mathbf{ds}} = (dx\partial D_x/\partial x)\, dydz$
  $+ (dx\partial D_y/\partial y)dxdz$
  $+ (dx\partial D_z/\partial z)dxdy$
- $= (\partial D_x/\partial x)\, dxdydz$
  $+ (\partial D_y/\partial y)dxdydz$
  $+ (\partial D_z/\partial z)dxdydz$
- $= (\partial D_x/\partial x)\, dv + (\partial D_y/\partial y)dv$
  $+ (\partial D_z/\partial z)dv$
- $\iint \underline{\mathbf{D}}.\underline{\mathbf{ds}} = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z).\ (D_x, D_y, D_z)\ dv$
- $\iint \underline{\mathbf{D}}.\underline{\mathbf{ds}} = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z).(D_x,D_y,D_z)dv$
- $\iint \underline{\mathbf{D}}.\underline{\mathbf{ds}} = \underline{\nabla}.\underline{\mathbf{D}}\ dv$

$dxdydz = dv$

۴۲

روابط محاسبه دیورژانس

- **در حالت کلی برای محاسبه دیورژانس یک بردار در دستگاههای مختصات مختلف می توان از رابطه زیر استفاده نمود، (در این رابطه مقدار h1,h2,h3 همان ضرایب متری است که قبلا تعریف شده اند):**

$$\nabla.\mathrm{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

۴۳

EXAMPLE 2–17 Find the divergence of the position vector to an arbitrary point.

۴۴

Find $\nabla \cdot \mathbf{B}$. $\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi \dfrac{k}{r}$.

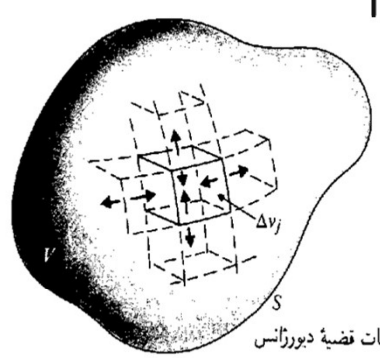
۴۵

قضیه دیورژانس

DIVERGENCE THEOREM

- انتگرال حجمی دیورژانس یک میدان برداری با شار کل خروجی بردار از سطح در بر گیرنده بردار برابر است.

$$\boxed{\int_V \nabla . A dv = \oint_S A.\mathrm{ds}}$$



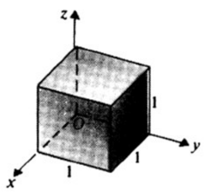
اثبات قضیهٔ دیورژانس

$$(\nabla . A)_j \Delta v_j = \oint_{S_j} A.\mathrm{ds}$$

$$\lim_{\Delta v_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{N} (\nabla . A)_j \Delta v_j \right] = \lim_{\Delta v_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{N} \oint_{S_j} A.\mathrm{ds} \right]$$

۴۶

EXAMPLE 2–19 Given $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x x^2 + \mathbf{a}_y xy + \mathbf{a}_z yz$, verify the divergence theorem over a cube one unit on each side. The cube is situated in the first octant of the Cartesian coordinate system with one corner at the origin.



۴۷

۴۸

CURL OF A VECTOR FIELD
کرل یک میدان برداری

در کنار دیورژانس که به قدرت منبع جریان یک میدان برداری اشاره دارد، منبع دیگری نیز به نام منبع گردابی(vortex source) برای یک میدان برداری وجود دارد.

(دقت کنید که این دو منبع کاملا مستقل هستند، مانند میدان سرعت سیال در ظرفی بدون افزایش یا کاهش حجم مایع و وجود یک همزن که موجب چرخش سیال شده؛ و یا سیالی که از چاهک سینک ظرفشویی در حال خروج است)

گردش خالص (net circulation)یک میدان برداری به دور یک مسیر بسته ، به عنوان انتگرال عددی خطی بردار ، روی آن مسیر تعریف می شود:

$$circulation\ of\ \mathrm{A}\ around\ countour\ C \triangleq \oint_C \mathrm{A}.dl$$

۴۹

کرل یک میدان برداری

- کرل میدان برداری A، که با curl A یا $\nabla\times A$نمایش داده میشود، برداری است که اندازه آن حداکثر شار خالص A در واحد سطح است وقتی که سطح به سوی صفر میل می کند و جهت آن عمود بر سطح است زمانی که سطح طوری جهت داده شده باشد تا گردش خالص بیشینه شود.

$$curl\ \ A \equiv \nabla \times A \overset{\Delta}{=} \lim_{\Delta s \to \circ}\left[a_n \oint_C A.dl\right]_{\max}$$

- یک میدان بدون کرل غیر گردشی یا ابقایی نامیده می شود.

۵۰

روش محاسبه کرل

- **در مختصات دکارتی برای محاسبه کرل می توان با فرض اینکه عملگر∇یک بردار است، از فرمول ضرب خارجی کمک گرفت.**
- **در حالت کلی برای محاسبه کرل یک بردار در دستگاههای مختصات مختلف می توان از رابطه زیر استفاده نمود:** (در این رابطه مقدار h1,h2,h3 همان ضرایب متری است که قبلا تعریف شده اند)

$$\nabla\times\mathrm{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} a_{u_1}h_1 & a_{u_2}h_2 & a_{u3}h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$

۵۱

قضیه استوکس
STOKES'S THEOREM

- **انتگرال سطحی کرل یک میدان برداری، روی یک سطح باز با انتگرال خطی بسته بردار روی مسیری که سطح را در بر می گیرد، معادل است.** (لازم است میدان برداری A و همچنین مشتقات اول آن موجود و روی S و در امتداد C پیوسته باشند)

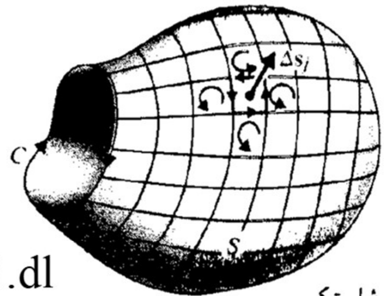
$$\boxed{\int_S(\nabla\times\mathrm{A}).\mathrm{ds}=C\oint_S A.\mathrm{dl}}$$

- **نتیجه:اگر انتگرال سطحی $\nabla\times$A روی یک سطح بسته انجام گیرد، حاصل صفر خواهد شد.**

۵۲

اثبات قضیه استوکس

- با توجه به شکل انتگرال خطیی حول چهار ضلع مربع، دو به دو قرینه بوده و نهایتا انتگرال حول مسیر خارجی باقی خواهد ماند.



اثبات قضیهٔ استوکس

$$(\nabla \times A)_j (\Delta s_j) = \oint_{C_j} A.\mathrm{dl}$$

$$\lim_{\Delta s_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{N} (\nabla \times A)_j \Delta S_j \right] = \lim_{\Delta S_j \to 0} \left[\sum_{j=1}^{N} \oint_{C_j} A.\mathrm{dl} \right]$$

۵۳

دو نتیجه مهم از دو قضیه اخیر

- کرل گرادیان یک میدان عددی(اسکالر) صفر است.
- هر میدان برداری بدون کرل(غیر گردشی یا ابقایی) را می توان به صورت گرادیان یک میدان عددی نوشت)

$$\nabla\times(\nabla V)\equiv 0$$

- دیورژانس کرل یک میدان برداری صفر است.
- هر میدان برداری بدون واگرایی(سولونوئیدی) را می توان به صورت کرل میدان بردای دیگری نوشت.

$$\nabla.(\nabla\times A)\equiv 0$$

۵۴

موفقیت در گرو نظم و برنامه ریزی است.

۵۵