بسم الله الرحمن الرحیم
الکترومغناطیس

دانشگاه شهید چمران

گروه برق

شهرزاد عجبی

الکترومغناطیس (عجبی)

۱

الکترومغناطیس

- نمره دهی:
  - حضور در کلاس (مشارکت در حل تمرینات کلاس و پرسش و پاسخ)
  - تمرین
  - کوئیز
  - امتحان
  - ا

الکترومغناطیس (عجبی)

۲

فصل اول: آنالیز برداری
vector analysis

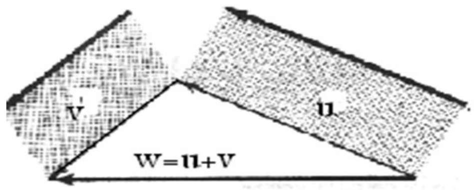
انواع کمیتها:

- **اسکالر** : Scalar quantities
- **اعداد معمولی معمولا اسکالر(نرده ای) خوانده می شوند.**
- مثال:جرم، حجم،دما، پتانسیل الکتریکی
- **برداری:**Vector quantities
- **کمیتهایی که هم دارای بزرگی و هم جهت هستند.**
- مثال: سرعت، نیرو، فشار، میدان الکتریکی

← **نکته : کمیتهای برداری و نقطه ای هر دو می توانند تابعی از زمان و مکان باشند.**

VECTOR ALGEBRA

- حاصل جمع دو بردار بردار دیگری است. و جمع بردار ها جابجایی پذیر است. $u+v=v+u=w$
- درجمع قانون شرکت پذیری برقرار است. $u+(v+w)=(u+v)+w$
- حاصل ضرب نرده ای در بردار ، بردار دیگری به دست می دهد.



الکترومغناطیس (عجمی)

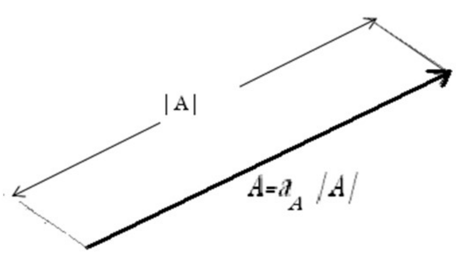
۵

- بردار یکه a_A برداری است که دارای جهتی هم سوی بردار $\mathbf{A}$ و اندازه یک دارد. در واقع این بردار اگر در اندازه بردار A ضرب شود، بردار $\mathbf{A}$ را به دست خواهد داد.

$$A = |A| \, a_A$$

$$a_A = \frac{A}{|A|}$$

- نمادهای مختلفی برای نمایش بردار وبردار یکه مورد استفاده قرار می گیرد.



الکترومغناطیس (عجمی)

۶

Addition of Vectors

در شکل زیر مجموع دو بردار A و B را ملاحظه می نمایید.

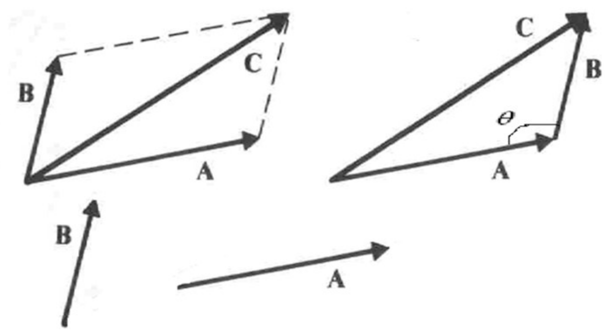
$A+B=C$

$|C|=(A^2+B^2 - 2AB\cos\theta)^{1/2}$

واضح است که در صورت جابجایی در جمع حاصل تغییر نمی کند.

از طرفی داریم:

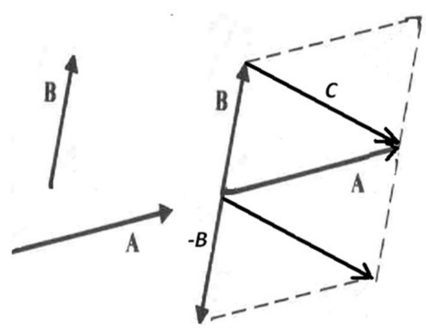
$-\mathbf{B}=(-a_B)|B|$



۷

Subtraction of Vectors

- واضح است که :
- $A-B=-(B-A)$
- **توجه:مجموع و تفاضل دو بردار به ترتیب قطر بزرگ و قطر کوچک متوازی الاضلاعی است که با بردار های موازی با دو برار رسم نموده ایم.**
- **نکته : این بردار در آینده برای بدست آوردن فاصله دو نقطه بسیار مفید خواهد بود.**

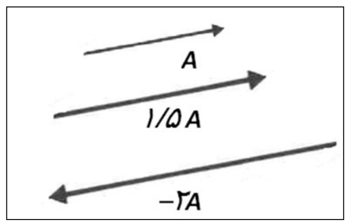


۸

- ضرب اسکالر در بردار:
- اگر $k>0$ — $kA=a_A\ (k|A|)$

  فقط بزرگی بردار را تغییر می دهد.
- اگر $k>0$ — $kA=-a_A\ (-k|A|)$

  بزرگی و جهت تغییر می کند.
- مثال:



۹

Multiplication of Vectors

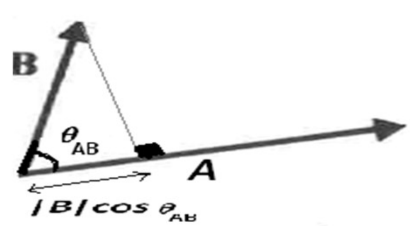
- دو نوع ضرب برداری وجود دارد:

  <u>ضرب داخلی و ضرب خارجی</u>

- **ضرب عددی یا داخلی** — **Scalar or Dot Product**

$$A.B=|A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}$$

θ_{AB} زاویه کوچکتر بین دو بردار و کمتر از ۱۸۰درجه



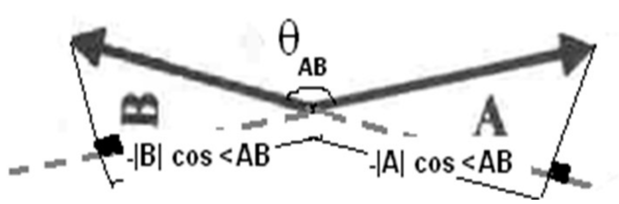
۱۰

نتایجی در مورد مقدار حاصل ضرب داخلی:

۱. یک کمیت اسکالر است.
۲. کوچکتر یا مساوی اندازه های آنها است.
۳. می تواند کمیتی مثبت یا منفی باشد.
۴. برابر است با حاصل ضرب یک بردار در تصویر دیگری بر روی بردار اول (توضیح: $|B|\cos\theta_{AB}$ را تصویر بردار B بر روی بردار A و $|A|\cos\theta_{AB}$ را تصویر بردار A بر روی بردار B می نامند.)
۵. اگر بردار ها بر یکدیگر عمود باشند حاصل ضرب صفر خواهد شد و بالعکس.

الکترومغناطیس (عجمی)

۱۱



- روابط زیر برای ضرب داخلی قابل اثبات است:
- $A.B=B.A$
- $A.(B+C)=A.B+A.C$
- $A.A=|A|^2$

الکترومغناطیس (عجمی)

۱۲

محاسبه ضرب داخلی

$$\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$$
$$\vec{B} = B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\cdot(B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z)\\ &= A_xB_x(\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x) + A_yB_y(\hat{a}_y\cdot\hat{a}_y) + A_zB_z(\hat{a}_z\cdot\hat{a}_z) + A_xB_y(\hat{a}_x\cdot\hat{a}_y) + A_xB_z(\hat{a}_x\cdot\hat{a}_z)\\ &\quad + A_yB_x(\hat{a}_y\cdot\hat{a}_x) + A_yB_z(\hat{a}_y\cdot\hat{a}_z) + A_zB_x(\hat{a}_z\cdot\hat{a}_x) + A_zB_y(\hat{a}_z\cdot\hat{a}_y)\end{aligned}$$

با کمک : $\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x = \hat{a}_y\cdot\hat{a}_y = \hat{a}_z\cdot\hat{a}_z = 1\cos(0^\circ) = 1$

و: $\hat{a}_x\cdot\hat{a}_y = \hat{a}_y\cdot\hat{a}_z = \hat{a}_z\cdot\hat{a}_x = \hat{a}_y\cdot\hat{a}_x = \hat{a}_z\cdot\hat{a}_y = \hat{a}_x\cdot\hat{a}_z = 1\cos(90^\circ) = 0$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)}$$

تمرین

$\vec{A} = -7\hat{a}_x + 12\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$ and $\vec{B} = 4\hat{a}_x - 2\hat{a}_y + 16\hat{a}_z$

- برای دو بردار فوق، ضرب داخلی و زاویه بین دو بردار را بدست آورید.

ضرب برداری یا خارجی یا چلیپایی

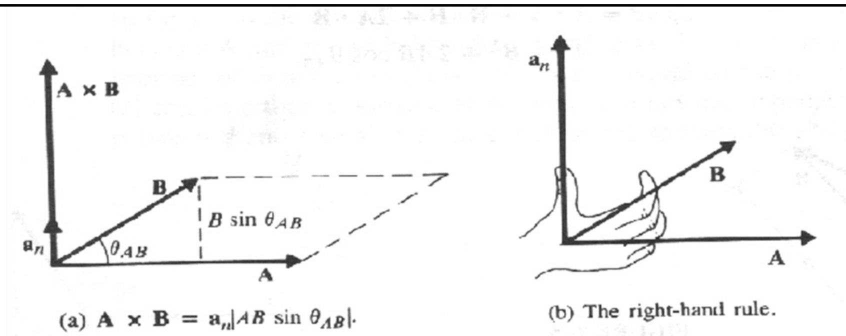
Vector or Cross Product

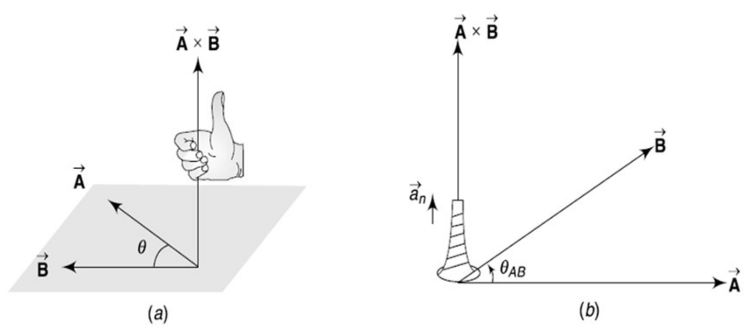
حاصل ضرب خارجی دو بردار($A\times B$)یک بردار است و با فرمول زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\equiv\mathbf{a_n}\ |\mathbf{A}||\mathbf{B}||\sin\theta_{AB}|$$

اندازه این بردار با فرمول فوق محاسبه می شود .
و جهت آن مطابق شکل و با قانون دست راست بدست می آید. (شکل صفحه بعد)
جابجایی عملوند ها جهت بردار حاصل را معکوس می کند.

۱۵

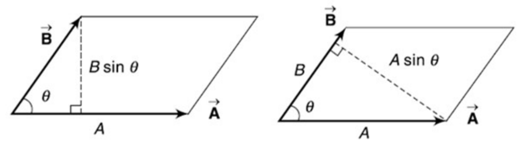




۱۶

نکاتی در رابطه با ضرب خارجی:

- $\mathbf{A\times B \equiv a_n\ |A|\,|B|\,|\sin\theta_{AB}|}$
- با توجه به شکل اندازه ضرب خارجی دو بردار برابر است با مساحت متوازی الاضلاع مار بر دو بردا ر



- $B\times A = -\,A\times B$ جابجایی در این ضرب صادق نیست.
- $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$ توزیع ضرب خارجی بر جمع
- $cA \times B = c(A \times B)$
- $A \times cB = c(A \times B$
- $A\times(B\times C) \neq (A\times B)\times C$ شرکت پذیری برقرار نیست.

الکترومغناطیس (عجمی)

۱۷

محاسبه ضرب خارجی دو بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$$
$$\vec{B} = B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z)\times(B_x\hat{a}_x + B_y\hat{a}_y + B_z\hat{a}_z)\\ &= A_xB_x(\hat{a}_x\times\hat{a}_x) + A_yB_y(\hat{a}_y\times\hat{a}_y) + A_zB_z(\hat{a}_z\times\hat{a}_z) + A_xB_y(\hat{a}_x\times\hat{a}_y) + A_xB_z(\hat{a}_x\times\hat{a}_z)\\ &\quad + A_yB_x(\hat{a}_y\times\hat{a}_x) + A_yB_z(\hat{a}_y\times\hat{a}_z) + A_zB_x(\hat{a}_z\times\hat{a}_x) + A_zB_y(\hat{a}_z\times\hat{a}_y)\end{aligned}$$

- و با توجه به:

$$\hat{a}_x\times\hat{a}_x = \hat{a}_y\times\hat{a}_y = \hat{a}_z\times\hat{a}_z = 0$$
$$\hat{a}_x\times\hat{a}_y = \hat{a}_z = -\hat{a}_y\times\hat{a}_x \qquad \hat{a}_y\times\hat{a}_z = \hat{a}_x = -\hat{a}_z\times\hat{a}_y \qquad \hat{a}_z\times\hat{a}_x = \hat{a}_y = -\hat{a}_x\times\hat{a}_z$$

- می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{a}_z\\ &= \begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\end{aligned}$$

الکترومغناطیس (عجمی)

۱۸

تمرین

- برای دو بردار داده شده :

$$\vec{A} = 8\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - 10\hat{a}_z \text{ and } \vec{B} = -15\hat{a}_x + 6\hat{a}_y + 17\hat{a}_z$$

- ضرب چلیپایی (خارجی) را بدست آورده و بردار یکه نرمال بر صفحه شامل دو بردار A و B را بدست آورید.

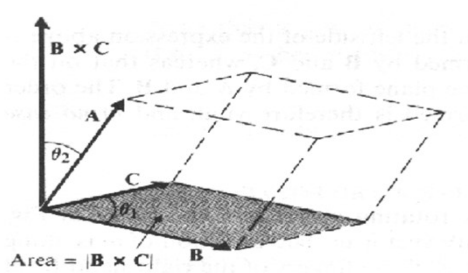
PRODUCT OF THREE VECTORS
دو نوع ضرب سه بردار وجود دارد

- نوع اول Scalar triple product

<u>A.(B ×C)=B.(C×A)=C.(A×B)</u>

- به ترتیب بردارهای A,B,C دقت نمایید.
- اندازه بردار حاصل برابر $|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\sin\theta_1 \cos\theta_2|$

و معادل است با حجم متوازی السطوحی که اضلاع آن را بردارهایی معادل با سه بردار A و B و C تشکیل داده باشند.این مورد با دقت در شکل قابل اثبات است.



الکترومغناطیس (عجمی)

نوع دو.م Vector triple product

$$\underline{\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}.\mathbf{B})}$$

- همانطور که ملاحظه می کنید، این حاصل ضرب به سادگی با تفاضل دو بردار قابل محاسبه است.(اثبات در کتاب چنگ موجود است)
- رابطه فوق به قاعده "back-cab" مشهور است.

الکترومغناطیس (عجمی)

۲۱

سه دستگاه مختصات متعامد

ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

- سه دستگاه مختصات متعامد متداول که در حل مسائل الکترومغناطیسی راه گشا هستند، عبارتند از:
  - ❖ دستگاه مختصات دکارتی **Cartesian (or rectangular) coordinates**
  - ❖ دستگاه مختصات استوانه ای **Cylindrical coordinates**
  - ❖ دستگاه مختصات کروی **Spherical coordinates**

نکته :

ویژگیهای یک بردار مستقل از دستگاه مختصات است . و آنچه در انتخاب دستگاه مختصات عبارت است از شکل هندسی مسئله ای که با آن سر و کار داریم.

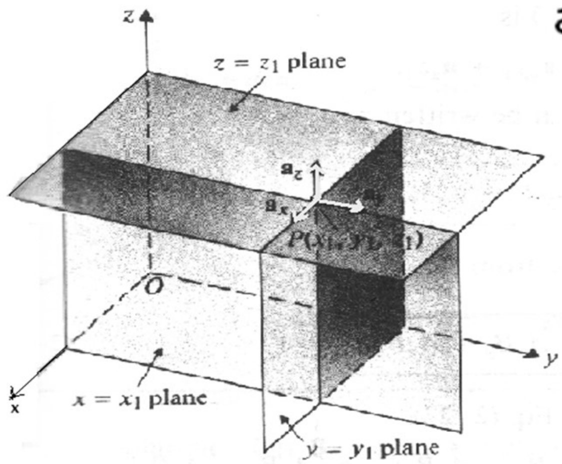
الکترومغناطیس (عجمی)

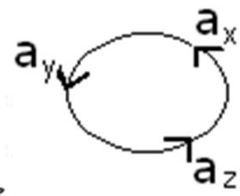
۲۲

دستگاه مختصات دکارتی (X,Y,Z)

بردارهای پایه: $\mathbf{a_x},\mathbf{a_y},\mathbf{a_z}$ در امتداد سه امتداد ثابت دو به دو بر هم عمود (راستگوش)

با توجه به شکل زیر جهت هر کدام از آنها را با داشتن جهت دو بردار دیگر می توان به دست آورد.



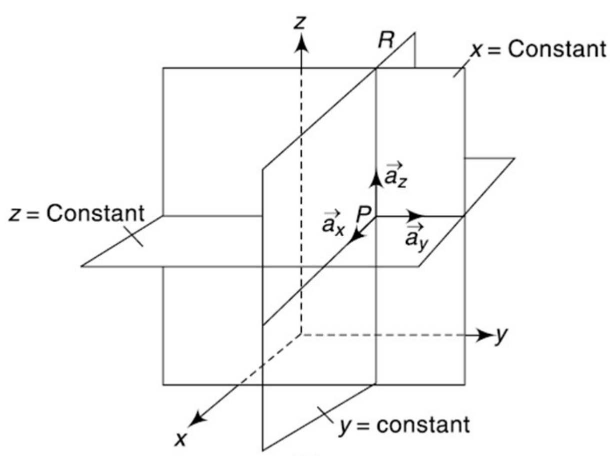


الکترومغناطیس (عجمی)

۲۳

نقطه دلخواه

صفحات عمود و سه بردار یکه مربوط به نقطه



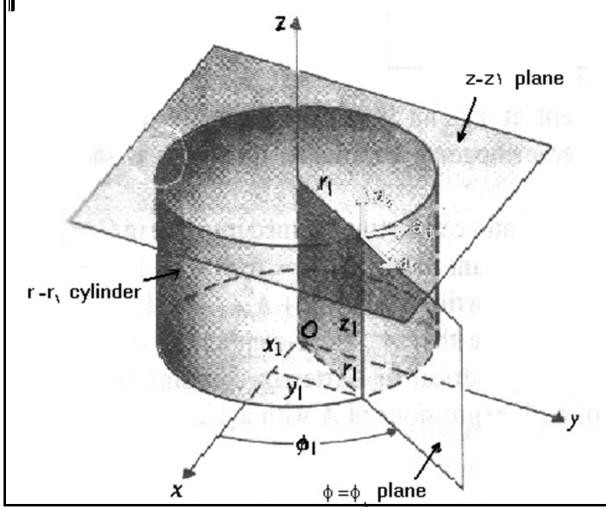
الکترومغناطیس (عجمی)

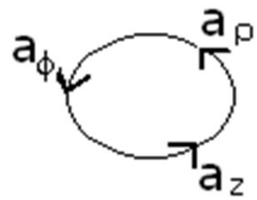
۲۴

دستگاه مختصات استوانه ایCYLINDRICAL

بردارهای پایه: $\mathbf{a_r, a_\varphi, a_z}$

به جای $\mathbf{a_r}$ از $\mathbf{a_\rho}$ نیز استفاده می شود



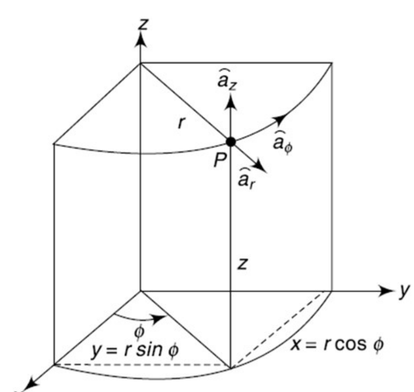


الکترومغناطیس (عجمی)

۲۵

نقطه دلخواه

سه بردار یکه مربوط به نقطه

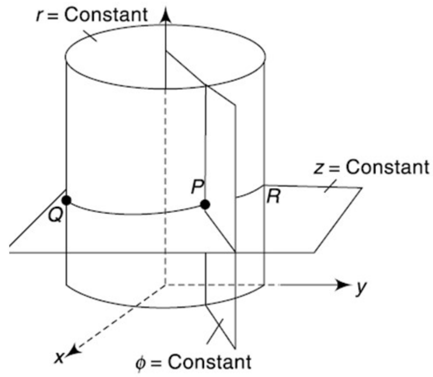


(a)

الکترومغناطیس (عجمی)

۲۶

نقطه دلخواه
صفحات عمود

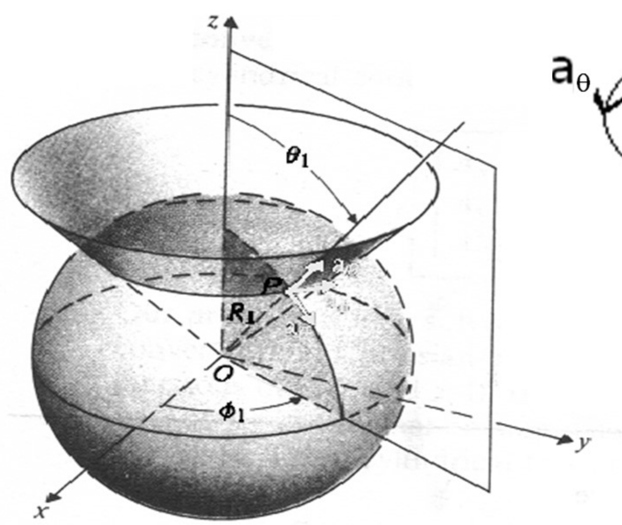


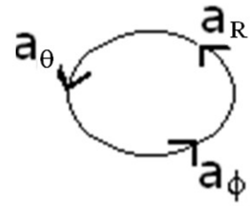
الکترومغناطیس (عجمی)

۲۷

دستگاه مختصات کروی SPHERICAL

بردارهای پایه: $\mathbf{a}_R, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$



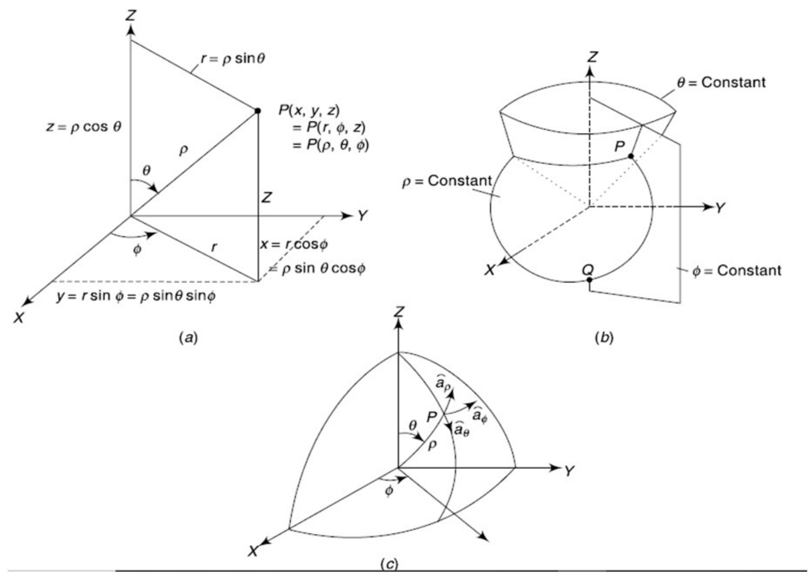


الکترومغناطیس (عجمی)

۲۸

نقطه دلخواه

صفحات عمود و سه بردار یکه مربوط به نقطه

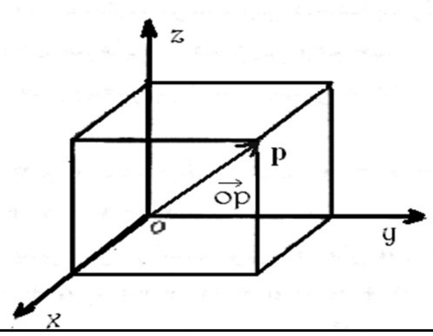


الکترومغناطیس (عجمی)

۲۹

نمایش یک نقطه در دستگاه های مختصات

- دکارتی $P=P_x a_x + P_y a_y + P_z a_z$
- استوانه ای $P=P_r a_r + P_\varphi a_\varphi + P_z a_z$
- کروی $P=P_R a_R + P_\theta a_\theta + P_\varphi a_\varphi$



الکترومغناطیس (عجمی)

۳۰

مهم

بردار مکانی یک نقطه: POSITION VECTOR

- یکی از مهمترین و پر کاربرد ترین بردارها در الکترومغناطیس برداری است که مبدا را به یک نقطه مورد نظر وصل می کند. مختصات و اندازه آن بسیار مورد توجه قرار دارد.

بردار مکانی نقطه P ($\mathcal{OP}$)

- دکارتی $\mathcal{OP} = P_x a_x + P_y a_y + P_z a_z$
- استوانه ای $\mathcal{OP} = P_r a_r + P_z a_z$
- کروی $\mathcal{OP} = P_R a_R$

- نکته: باید توجه داشت که اگر چه در بردار مکانی نقطه در دو دستگاه کروی و استوانه ای دو یا یک مولفه ظاهر نشده اند . ولی در واقع این مولفه ها در بردار پایه a_R یا a_r مستتر اند.

فاصله مبدا از نقطه P(یا اندازه بردار $\mathcal{OP}$)

دکارتی: $|\mathcal{OP}| = (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)^{۱/۲}$

استوانه ای : $|\mathcal{OP}| = (P_r^2 + P_z^2)^{۱/۲}$

کروی: $|\mathcal{OP}| = P_R$

نکته:باید توجه داشت که جهت بردارهای پایه دستگاه مختصات دکارتی در کل فضا ثابت است. ولی در سایر دستگاه ها به دلیل منحنی الخط بودن این ویژگی وجود ندارد.

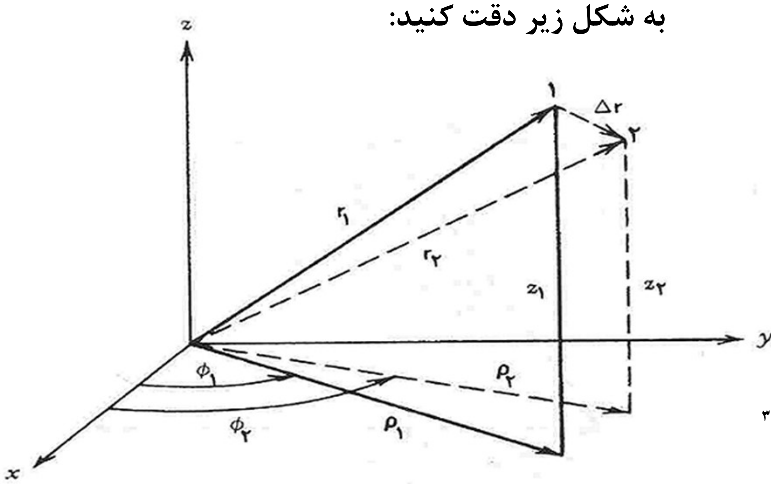
درجمع دو بردار $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دردستگاه مختصات دکارتی از فرمول مقابل استفاده می شود.

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}=(A_x+B_x)a_x+(A_y+B_y)a_y+(A_z+B_z)a_z$$

اما در دو دستگاه دیگر باید توجه داشت که:

$$\mathbf{a}_{rA} \neq \mathbf{a}_{rB}$$
$$\mathbf{a}_{RA} \neq \mathbf{a}_{RB}$$
$$\mathbf{a}_{\varphi A} \neq \mathbf{a}_{\varphi B}$$
$$\mathbf{a}_{\theta A} \neq \mathbf{a}_{\theta B}$$

به شکل زیر دقت کنید:



الکترومغناطیس (عجمی)

۳۳

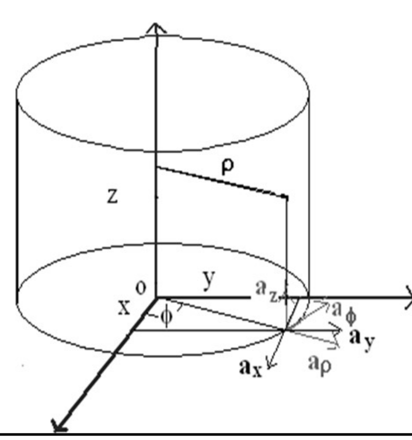
ارتباط مختصات یک نقطه در سه دستگاه متعامد

در برخی موارد لازم است، مختصات نقاط را به دستگاه های مختلف برد، چرا که در هر مسئله با توجه به شکل هندسی آن ،انتخاب دستگاه مناسب می تواند حل مسئله را بسیار ساده تر کند.

استوانه ای به دکارتی و با لعکس

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$
$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$
$$z = z$$



الکترومغناطیس (عجمی)

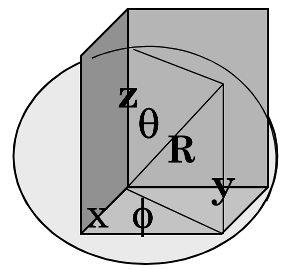
۳۴

ارتباط مختصات یک نقطه در سه دستگاه متعامد

کروی به دکارتی و با لعکس

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = R \cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$



الکترومغناطیس (عجمی)

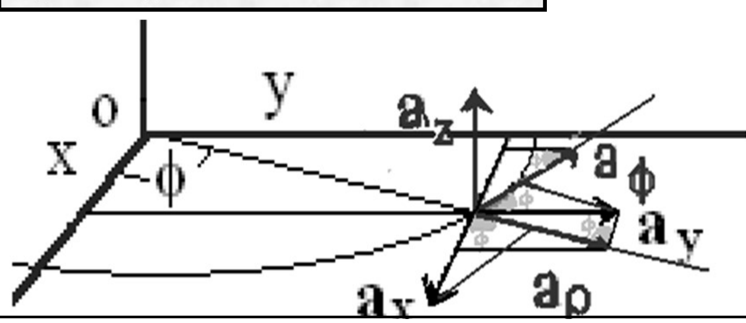
۳۵

تبدیل بردارهای پایه دستگاه های مختصات مختلف

برای تبدیل یک بردار از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر لازم است، از روابط تبدیل بردار پایه که در ادامه می آید ،استفاده نمود.

استوانه ای به دکارتی

$$a_r = a_x \cos\phi + a_y \sin\phi$$
$$a_\phi = -a_x \sin\phi + a_y \cos\phi$$
$$a_z = a_z$$

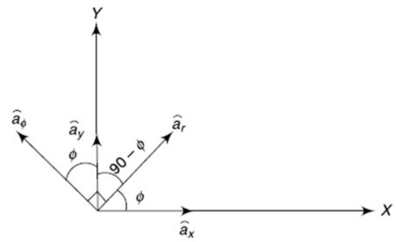


الکترومغناطیس (عجمی)

۳۶

استوانه ای به دکارتی

$$\hat{a}_x = \cos\phi\ \hat{a}_r - \sin\phi\ \hat{a}_\phi$$
$$\hat{a}_y = \sin\phi\ \hat{a}_r + \cos\phi\ \hat{a}_\phi$$
$$\hat{a}_z = \hat{a}_z$$



$$\hat{a}_r = \cos\phi\ \hat{a}_x + \sin\phi\ \hat{a}_y$$
$$\hat{a}_\phi = -\sin\phi\ \hat{a}_x + \cos\phi\ \hat{a}_y$$
$$\hat{a}_z = \hat{a}_z$$

الکترومغناطیس (عجمی)

۳۷

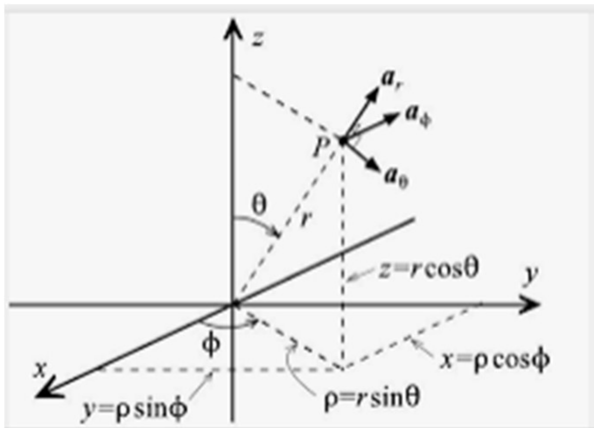
$$\boxed{\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}} \quad \text{and} \quad \boxed{\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}}$$

الکترومغناطیس (عجمی)

۳۸

تبدیل بردارهای پایه دستگاه های مختصات مختلف

کروی به دکارتی



الکترومغناطیس (عجمی)

۳۹

تبدیل بردارهای پایه دستگاه های مختصات مختلف

کروی به دکارتی

$$a_R = a_x \sin\theta\cos\phi + a_y \sin\theta\sin\phi + a_z \cos\theta$$

$$a_\theta = a_x \cos\theta\cos\phi + a_y \cos\theta\sin\phi - a_z \sin\theta$$

$$a_\phi = -a_x \sin\phi + a_y \cos\phi$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ -\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

الکترومغناطیس (عجمی)

۴۰

جزء های جابه جایی، مساحت و حجم
DIFFERENTIAL LENGTH
DIFFERENTIAL AREAS
DIFFERENTIAL VOLUME

در بسیاری از محاسبات، نظیر محاسبه میدان های الکتریکی و مغناطیسی و نیرو ها، ما نیاز به انتگرال گیری های مختلف بر روی سطح، طول ، حجم داریم. صرفنظر از انواع انتگرال گیری ها که متعاقبا به آنها می پردازیم. نیاز به آشنایی با دیفرانسیلهای جابجایی، سطحی و حجمی وجود دارد.

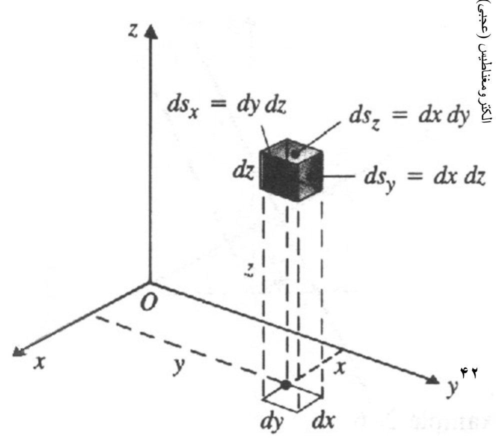
در اسلا ید های بعدی این عبارات را در سه دستگاه مختصات مختلف معرفی خواهیم نمود.

دستگاه مختصات دکارتی

$\mathbf{dl} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$

$ds_x = dydz$
$ds_y = dxdz$
$ds_z = dxdy$

$dv = dxdydz$

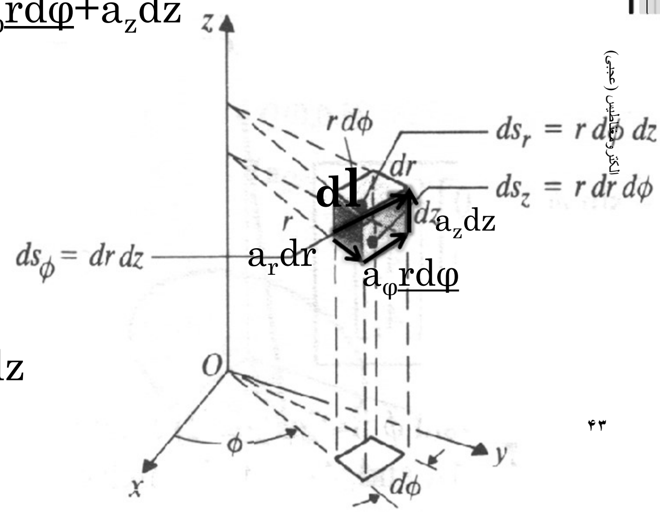


دستگاه مختصات استوانه ای

$\mathbf{dl} = a_r dr + a_\varphi \underline{r d\varphi} + a_z dz$

$ds_r = r d\varphi dz$
$ds_\varphi = dr dz$
$ds_z = r dr d\varphi$

$dv = r dr d\varphi dz$

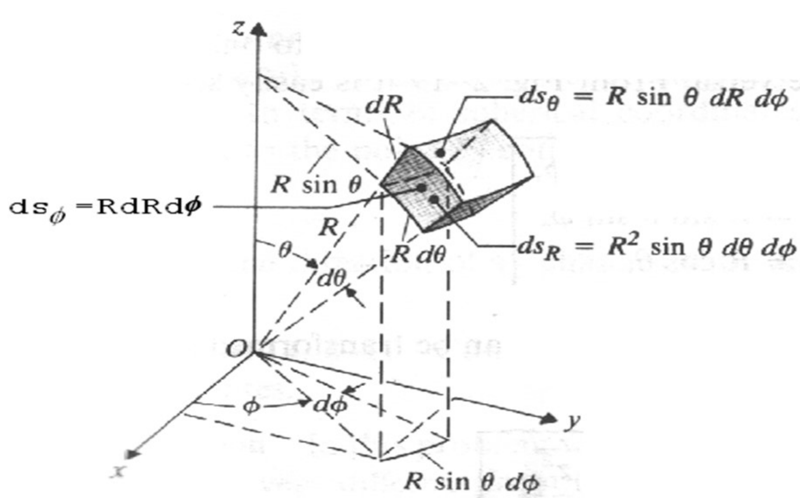


الکترومغناطیس (عجمی)

۴۳

دستگاه مختصات کروی

$\boldsymbol{dl} = a_R dR + a_\theta R d\theta + a_\varphi r sin d\varphi$



الکترومغناطیس (عجمی)

۴۴

دستگاه مختصات کروی

$ds_R = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$ds_\theta = R \sin\theta \, dR \, d\varphi$

$ds_\varphi = R dR \, d\theta$

$dv = R^2 \sin\theta dR d\varphi \, d\theta$

الکترومغناطیس (عجمی)

۴۵

موفقیت در گرو نظم و برنامه ریزی است.

الکترومغناطیس (عجمی)

۴۶