به نام خدا

جزوه ی مدارهای الکتریکی۱

استاد: دکتر علائی‌شینی

رشته‌ی مهندسی برق

دانشکده‌ی مهندسی دانشگاه شهید چمران اهواز

تهیه و تنظیم: روح‌الله بهمنی‌نیا

خرداد ۹۷

Subject
Date

فصل ۱ و ۲

قوانین پایه

اجزای مدار

Subject ۱
Date ۹۴,۱۱,۱۵ یکشنبه

تعاریف و قوانین پایه

مدار الکتریکی : شبکه‌ای به هم پیوسته از عناصر مدار.

مدار فشرده : مداری که به اطراف تشعشع انرژی نداشته باشد.

(قوانین KVL و KCL برای مدارهای فشرده برقرار است)

ابعاد مدار فشرده، خیلی کمتر از طول موج کاری مدار است.

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$c \rightarrow$ سرعت نور $= ۳\times ۱۰^{۸}\ m/s$

$f \rightarrow$ فرکانس کاری

(E_1) $f = ۱۰۰\ KHz \rightarrow \lambda = \frac{۳\times ۱۰^{۸}}{۱۰۰۰۰۰} = ۳۰۰۰\ m = ۳\ Km$

(E_2) $f = ۳\ GHz = ۳\times ۱۰^{۹}\ Hz$ ، $\lambda = \frac{۳\times ۱۰^{۸}}{۳\times ۱۰^{۹}} = ۰/۱\ m = ۱۰\ cm$

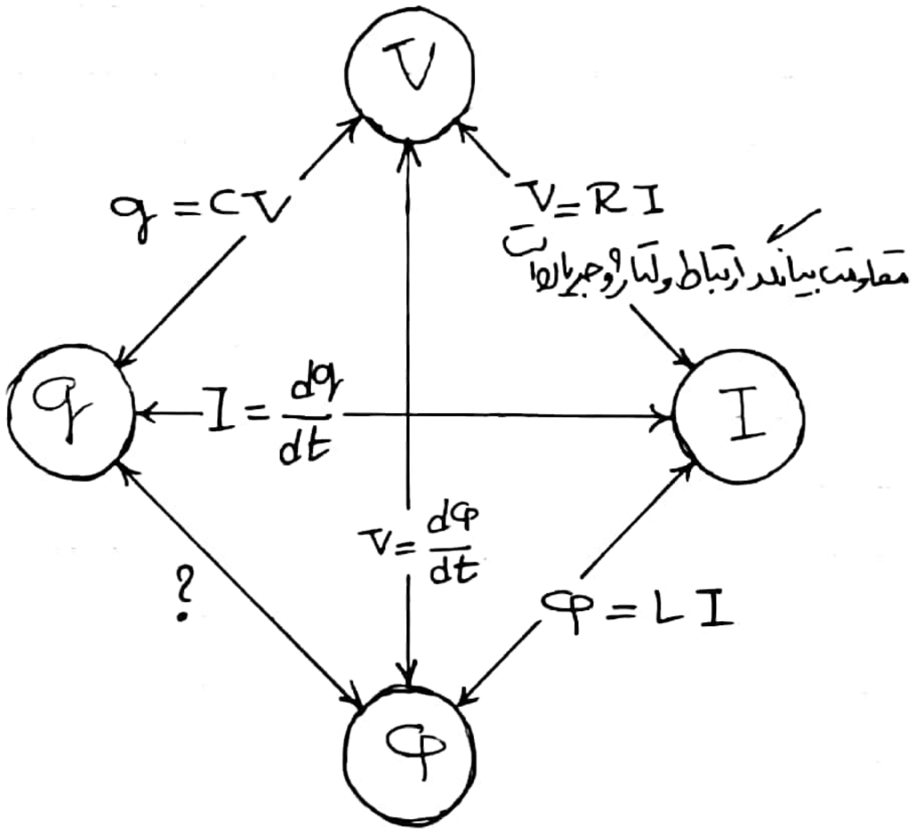
ابعاد مدار $\ll ۱۰\ cm$

در درس مدارهای الکتریکی با مدار فشرده سروکار داریم.

عناصر مدار الکتریکی : قطعاتی که از نیمه هادی ها ساخته می شوند مثل R، L، C، منبع ولتاژ و جریان

مقاومت، سلف و خازن عناصر ۲ پایه هستند و به عنوان عناصر اولیه مدار شناخته می شوند.

چهار کمیت الکتریکی اصلی : V , I , q , φ



شاخه

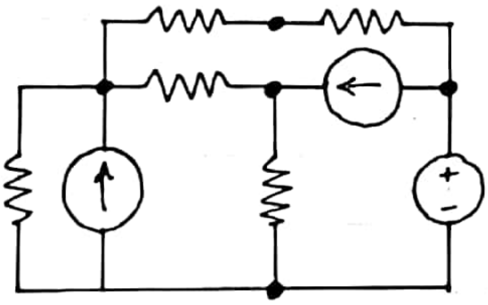
هر المان مداری دو سر، یک شاخه است. شاخه را به صورت یک پاره خط نشان می دهیم

شاخه: branch

گره

محل به هم رسیدن دو یا چند المان مدار یا شاخه

مثال:

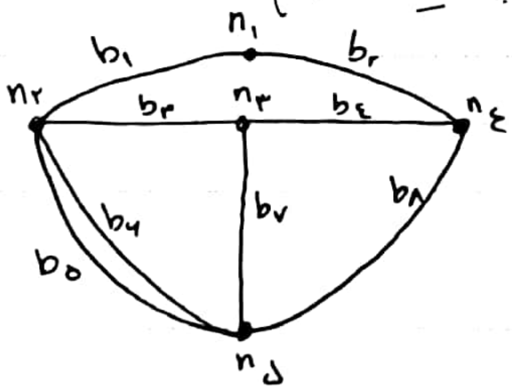


این مدار ۵ گره دارد

نمایش توپولوژی (گراف) مدار

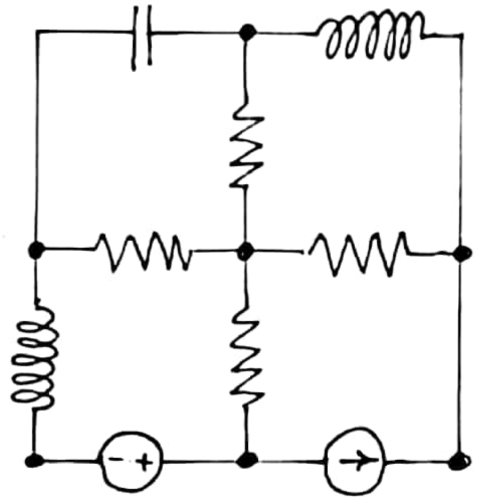
نمایش مدار با گره ها و شاخه ها (بدون توجه به ماهیت شاخه ها)

گراف مثال ⇐

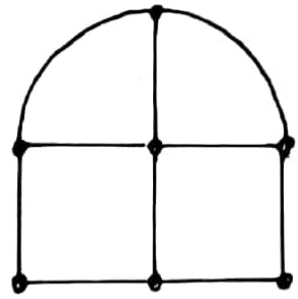


۸ شاخه
۵ گره

مثال ۲



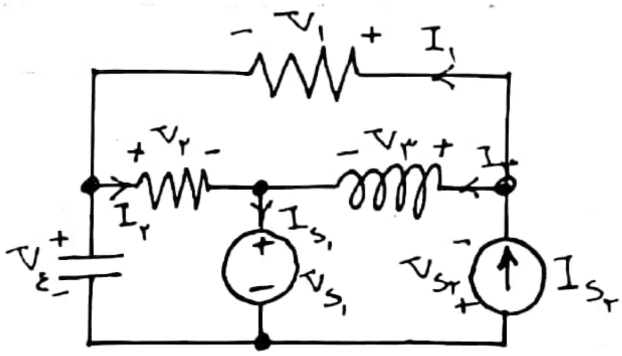
گراف ⟹

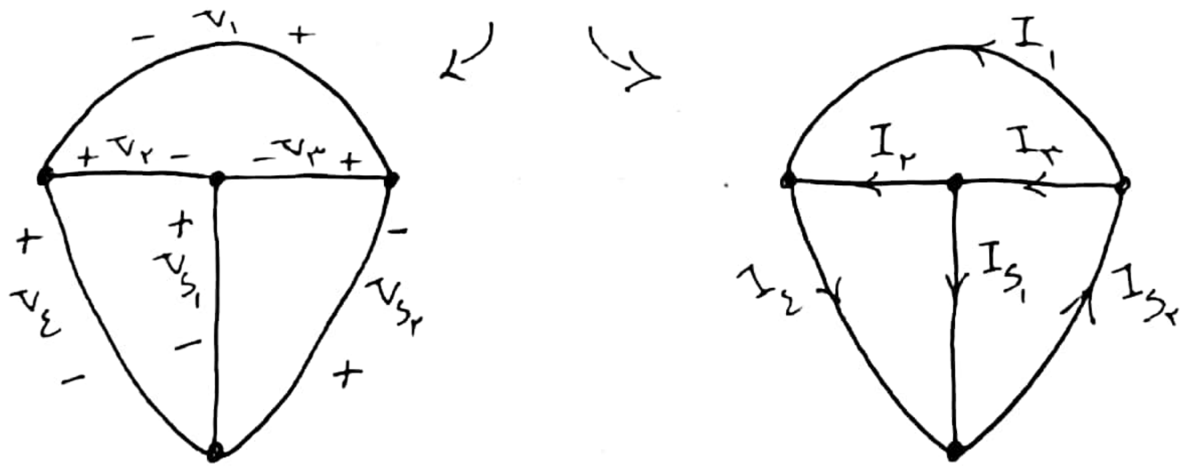


جهت قراردادی متناظر برای ولتاژ و جریان

جریان واردشونده از سر مثبت ولتاژ به المان، جهت قراردادی جریان است.

مثال ۳ :





با رعایت جهت‌های قراردادی متناظر:

ولتاژ شاخه $+v_b-$ ، توان تلف شده توسط شاخه $p = v_b \times I_b$ ، $p: \begin{cases} p>0 \\ p<0 \end{cases}$

$p>0$: شاخه توان تلف می‌کند

$p<0$: شاخه توان تولید می‌کند.

در مدار فشرده، جمع جبری توان برای همه شاخه‌های مدار صفر است (طبق اصل پایستگی انرژی)

b ← تعداد شاخه‌ها

$$\sum_{i=1}^{b} P_i = 0$$

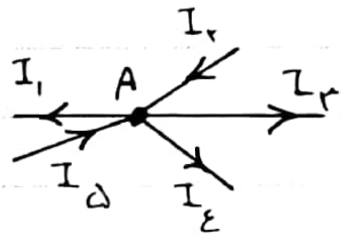
قانون KCL

در هر مدار فشرده برای هر گره‌ی مدار در هر لحظه، جمع جبری جریان‌های گره، صفر است

(در گره‌های مدار، چشمه و چاه نداریم)

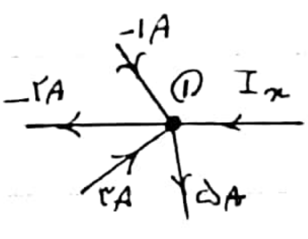
علامت در جمع جبری:
- مثبت: برای جریان خارج شونده از گره
- منفی: برای جریان وارد شونده از گره

مثال ۱:



$KCL(A): I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0$

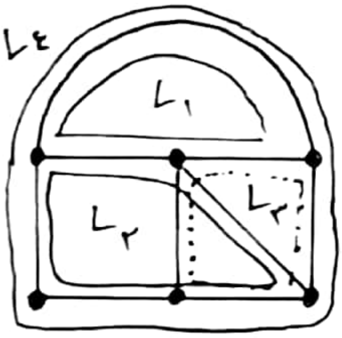
مثال ۲:

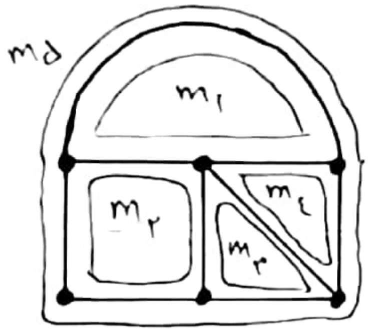


$KCL(1): \ 1 - I_x + 5 - 3 - 2 = 0$

$\underline{I_x = 1A}$

حلقه (Loop) : هر مسیر بسته‌ای که از عناصری از مدار عبور کند.

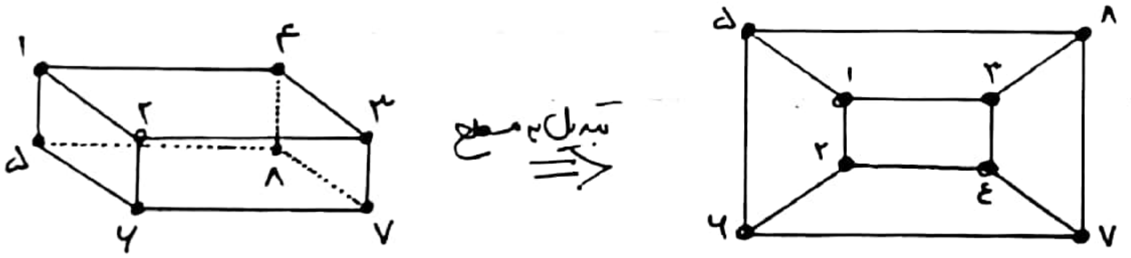




مش (mesh) : حلقه‌های ساده‌ای هستند که هیچ در مسیر خود شاخه‌ای را قطع نمی‌کنند.
هر مدار یک مش خارجی و تعدادی مش داخلی دارد.

مدار مسطح

مداری که به صورت دو بعدی، بدون عبور شاخه‌ای از روی شاخه‌ی دیگر رسم می‌شود.



تعداد مش‌ها در مدار مسطح :

b : تعداد شاخه‌ها   n : تعداد گره‌ها   تعداد مش‌های داخلی : $b - n + 1$

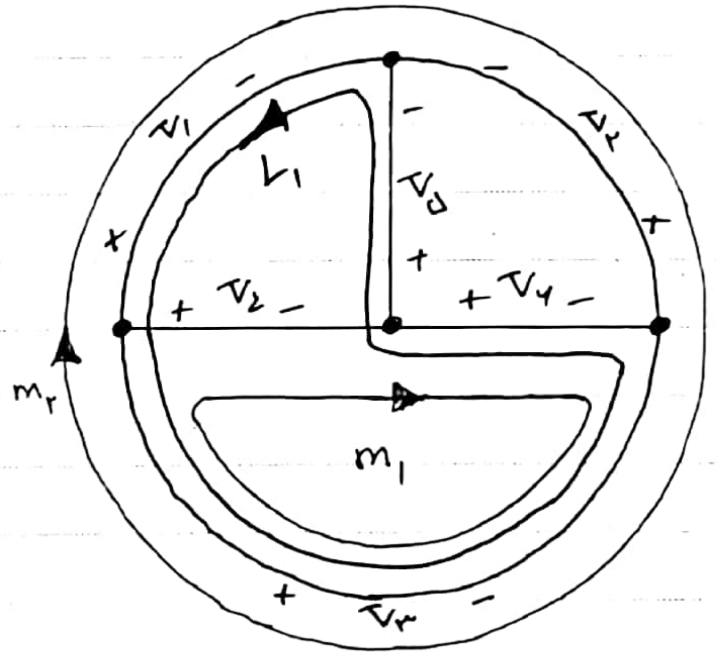
جهت جریان حلقه : جهت قراردادی برای چرخش در حلقه (مثلاً جهت حرکت عقربه‌های ساعت CW)

قانون KVL

برای هر حلقه از مدار فشرده، در هر لحظه از زمان جمع ~~[illegible]~~ جبری ولتاژهای شاخه‌های حلقه صفر است.

علامت در جمع جبری:
- (+) : برای حالتی که در جهت چرخش حلقه، ابتدا به پلاریته‌ی مثبت ولتاژ شاخه برسیم
- (−) : " " " " " " منفی " " "

مثال:



$b = ۶$

$n = ۴ \Rightarrow m = ۳$

$$KVL(m_1): +v_۴ + v_۶ - v_۳ = ۰$$

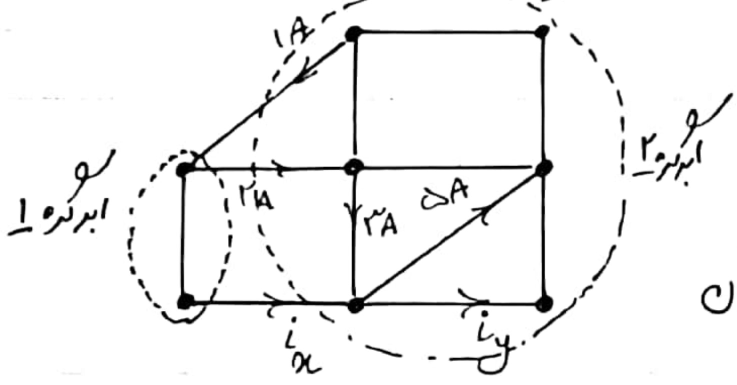
$$KVL(L_۲): -v_۱ + v_۳ - v_۶ + v_۵ = ۰$$

$$KVL(m_۲): v_۱ - v_۲ - v_۳ = ۰$$

گره مرکب (ابرگره)

مجموعه بسته‌ای که درون آن دو گره یا بیشتر وجود داشته باشد.

مثال



می‌توانیم ابرگره‌هایی را در نظر بگیریم که فقط جریان‌های مجهول از آن گره‌ها وارد و خارج شوند.

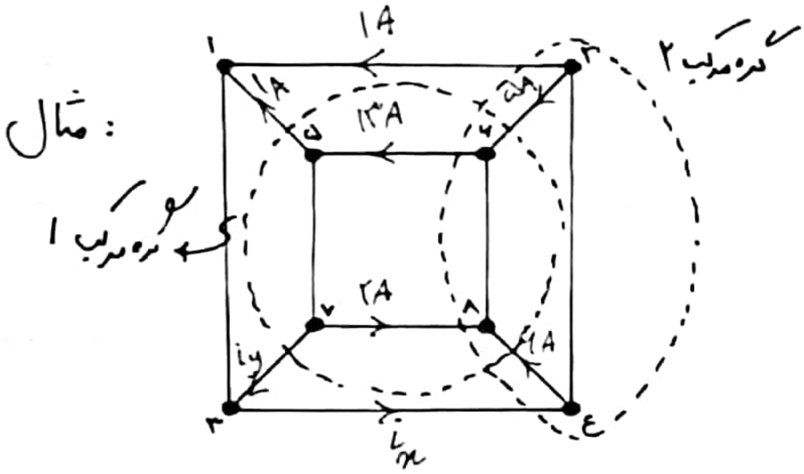
ابرگره را به صورت یک گره فرض می‌کنیم و قانون KCL را به این صورت می‌نویسیم :

جریان‌های وارد شونده به محیط بسته ابرگره علامت منفی می‌گیرند و جریان‌ها خارج شونده از ابرگره علامت مثبت می‌گیرند.
(در واقع KCL برای گره‌ی مرکب از جمع روابط KCL در گره‌های صادق قابل محاسبه است)

KCL (ابرگره ۱) : $-1A + 2A + i_x = 0 \Rightarrow i_x = -1A$

KCL (ابرگره ۲) : $1A - 2A + 3A - 5A - i_y = 0 \Rightarrow i_y = -3A$

مثال :



KCL (ابرگره ۱) : $1A + i_y - 6A - 5A = 0 \Rightarrow i_y = 10A$

KCL (ابرگره ۲) : $1A + 13A - 2A - i_x = 0 \Rightarrow i_x = 12A$

فصل ۲: اجزای مدار

- المان‌های مدار
  - مقاومت، سلف، خازن ⇐
    - خطی
      - تغییرناپذیر با زمان
      - تغییرپذیر با زمان
    - غیرخطی
      - تغییرناپذیر با زمان
      - تغییرپذیر با زمان
  - منابع
    - ولتاژ
      - مستقل
      - وابسته به
        - ولتاژ
        - جریان
    - جریان
      - مستقل
      - وابسته به
        - ولتاژ
        - جریان

مقاومت

عنصری که ارتباط دهنده‌ی ولتاژ و جریان است.

مثال: $v = f(i)$ یا $i = f(v)$

مقاومت خطی

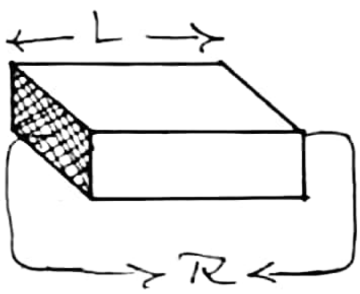
از قانون اهم تبعیت می‌کند

$$v = Ri \quad , \quad i = Gv$$

R: مقاومت (Ω) اهم

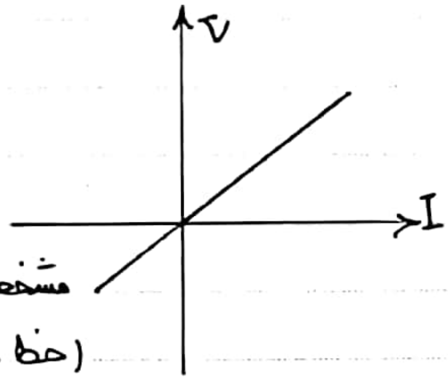
G: هدایت $(\mho)$ مُهو یا زیمنس

PAPCO



$$R = \frac{1}{\alpha}\,\frac{L}{A} = \rho \cdot \frac{L}{A}$$

ρ: مقاومت ویژه α: هدایت ویژه



مشخصه‌ی مقاومت خطی
(خط راست که از مبدا گذرد)

مشخصه‌ی الکتریکی:

- مقاومت ⟸ مشخصه جریان - ولتاژ (یا ولتاژ و جریان)
- خازن ⟸ رابطه نمودار بیان‌کننده‌ی ارتباط $V - q$, $q - V$
- سلف ⟸ رابطه یا نمودار بیان‌کننده‌ی ارتباط $I - \varphi$, $\varphi - I$

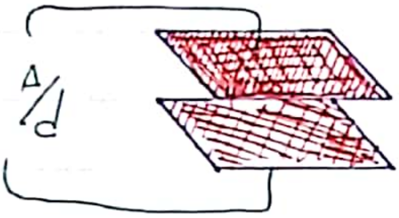
عنصر خطی: عنصری است که مشخصه الکتریکی آن خطی باشد.

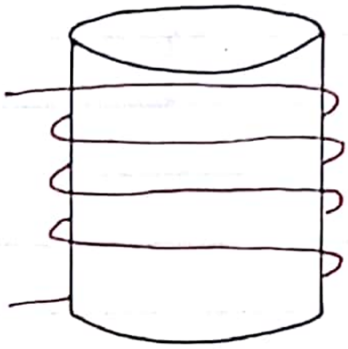
مقاومت خطی ⟸ $V = RI$,

خازن خطی ⟸ $q = VC$

سلف خطی ⟸ $\varphi = IL$

$C = \epsilon \frac{A}{d}$

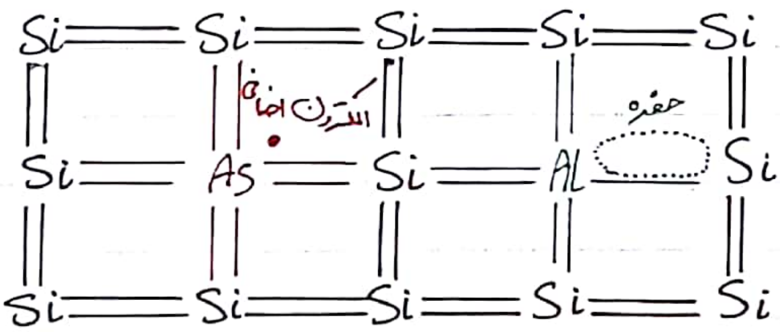


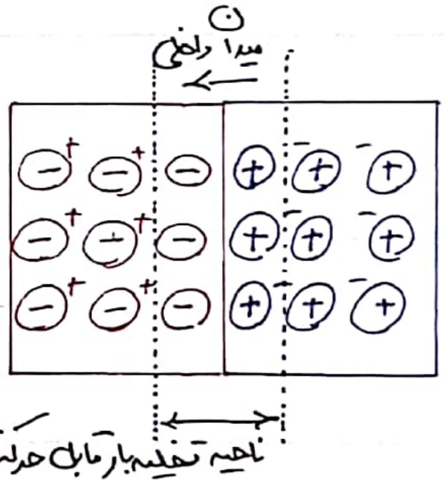


$\varphi = LI$

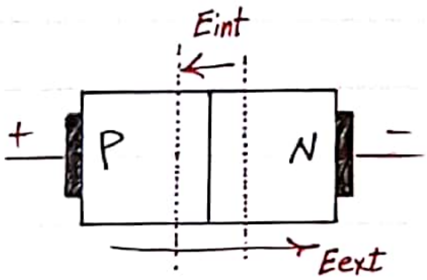
مقاومت های غیرخطی

هر دیودی را می‌توان یک مقاومت غیرخطی در نظر گرفت



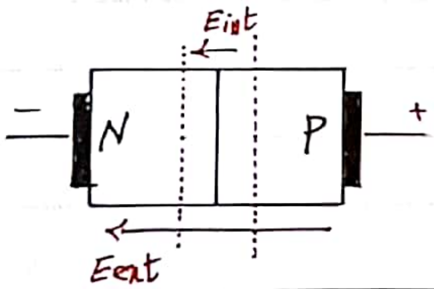


اگر ←

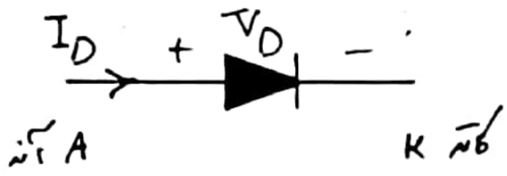


$E_{ext} > E_{int} \rightarrow$ جریان قابل ملاحظه

واگر ←



دراین حالت که بایاس معکوس نامیده می‌شود، به کمک میدان خارجی ناحیه تخلیه گسترش پیدا می‌یابد.



$$V_D = V_A - V_K$$

I_D همیشه وارد شونده از آند درنظر گرفته شود

$$I_D = I_S\left(e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} |V_D| \gg \eta V_T \\ V_D < 0 \end{array}\right\} \rightarrow I_D = -I_S$$

I_S : جریان اشباع معکوس

η : ضریب ایده آلی

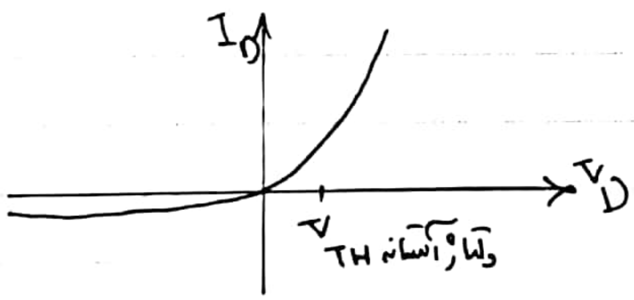
ولتاژ حراری $V_T = \frac{KT}{q}$

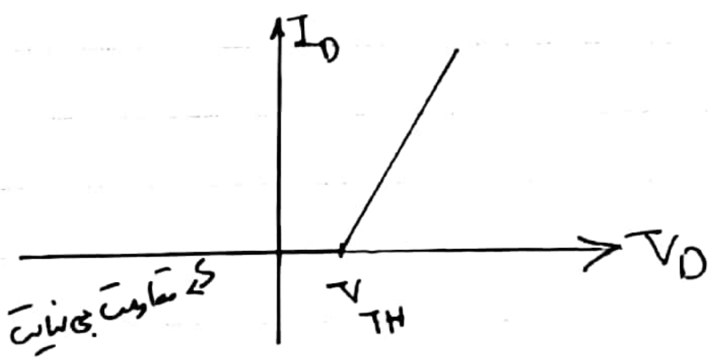
K ← ثابت بولتزمن

T ← دما برحسب کلوین

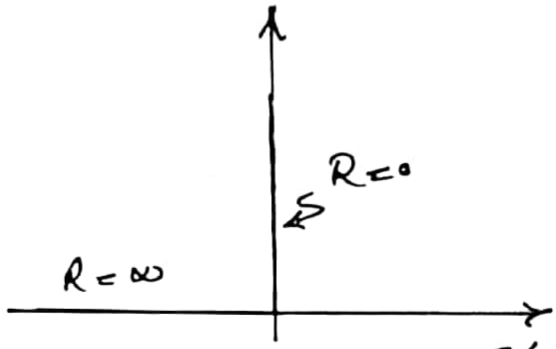
q ← بار الکترون

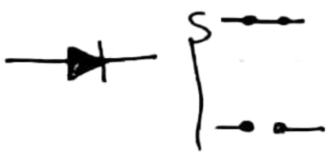
ساده سازی دیود





تقریب ایده‌آل

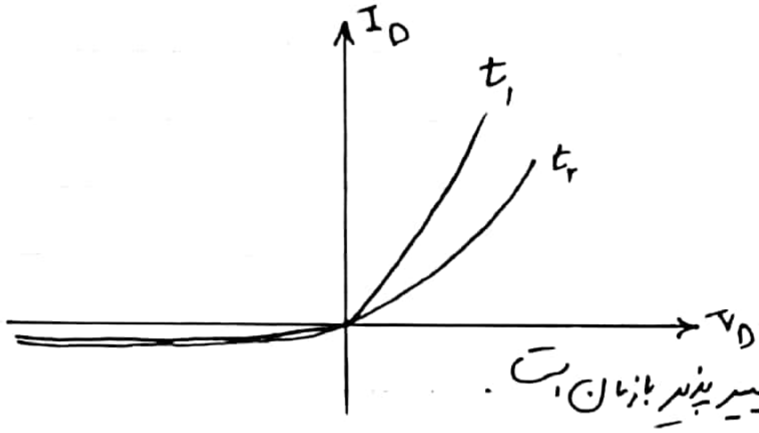




$V_D>0 \rightarrow$ دیود اتصال کوتاه

$V_D<0 \rightarrow$ دیود مدار باز

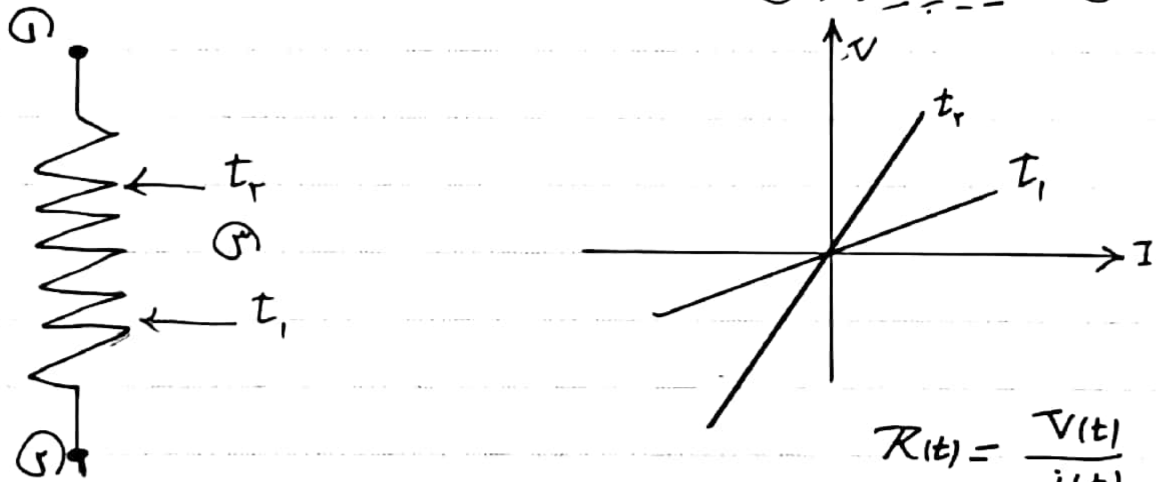
اگر دیود در محیطی با دمایی که تابع زمان است، قرار بگیرد، مشخصه $I-V$ با زمان تغییر می‌کند.



$$V_{T_2} > V_{T_1} \Rightarrow T_2 > T_1$$

در این حالت دیود، یک مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان است.

مقاومت خطی و تغییرپذیر با زمان

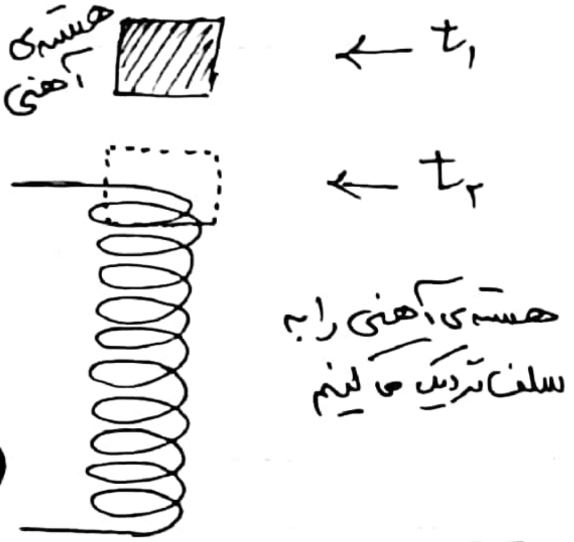


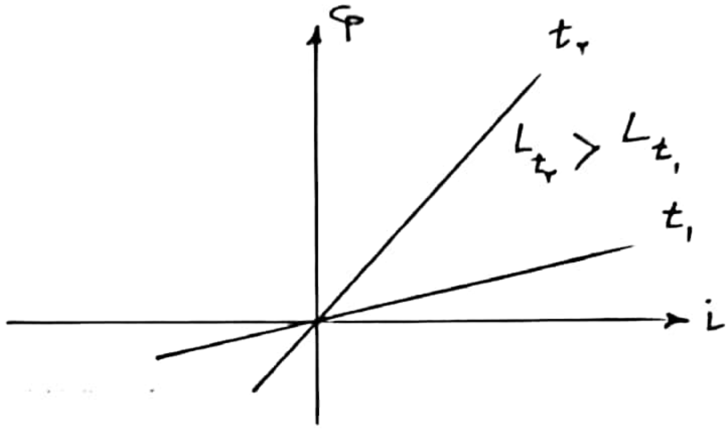
$$R(t) = \frac{V(t)}{i(t)}$$

در t_1 مقاومت نسبت به زمان t_2 کمتر است و شیب در t_1 نیز نسبت به t_2 کمتر است.

با توجه به اینکه نسبت ولتاژ به جریان در هر لحظه تابع مقدار ولتاژ و جریان نیست (تابع زمان است)، مقاومت خطی است.

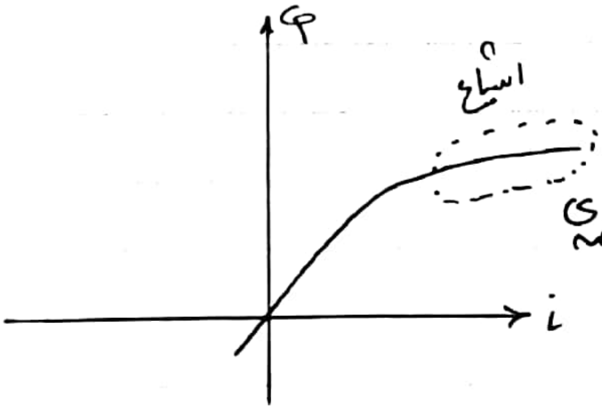
سلف خطی و تغییرپذیر با زمان





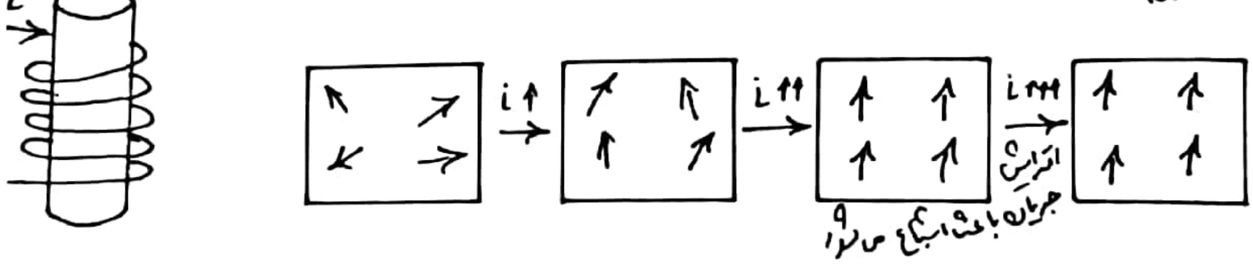
با توجه به رابطه‌ی : $\varphi = Li$ با نزدیک کردن هسته‌ی آهنی به سلف، ضریب القاییدگی و شار φ افزایش می‌یابند.

حالت غیرخطی در سلف

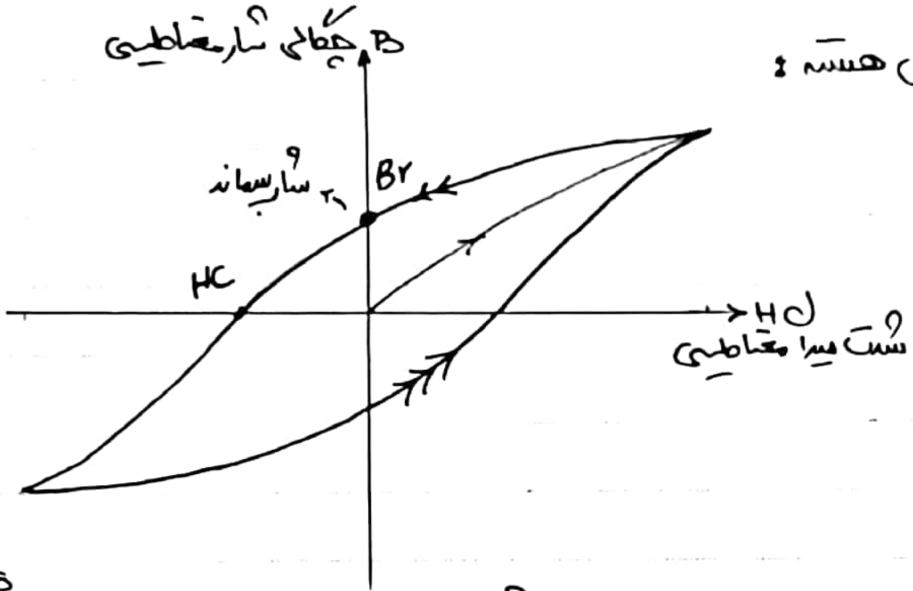


در سلف با هسته مغناطیسی، با افزایش جریان، پدیده‌ی اشباع هسته باعث غیرخطی شدن مشخصه‌ی سلف می‌شود.

اشباع هسته

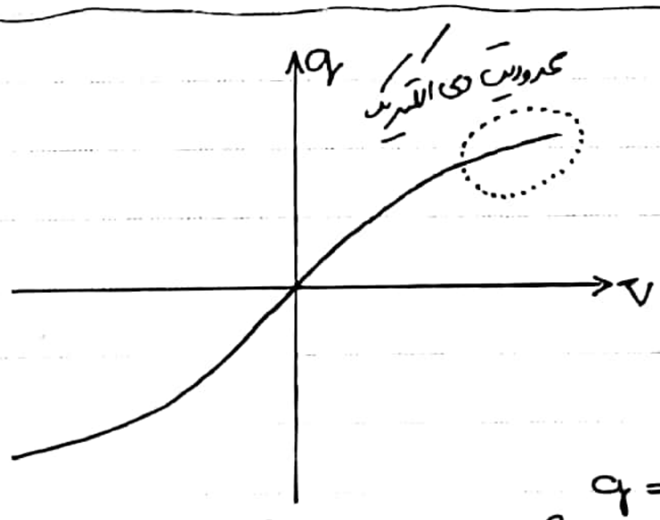


منحنی مغناطیس شوندگی هسته :

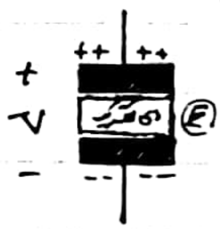


$I_0 = \frac{\varphi_0}{L} \leftarrow \varphi_0 \leftarrow B_0$ شار پسماند

خازن غیرخطی



همه‌ی خازن ها حداکثر ولتاژ کاری دارند به علت شکست دی الکتریک.

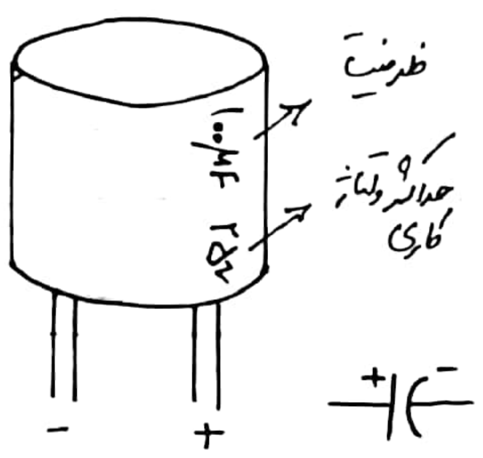


طبق رابطه $q = CV$

افزایش ولتاژ (V) ، افزایش بار (q) را سبب می شود و افزایش بار باعث افزایش میدان الکتریکی در دی الکتریک می شود و میدان به میدان شکست دی الکتریک نزدیک می شود

$V\uparrow \Rightarrow q\uparrow \Rightarrow E\uparrow$ نزدیک به میدان شکست دی الکتریک می شود

خازن الکترولیتی



دی الکتریک این خازن‌ها، به نوعی مواد شیمیایی آغشته است که در عمل، حالت یک کاتالیزور را دارا می‌باشند و باعث بالا رفتن ظرفیت خازن می‌شوند.

خازن پلاریته دار، خازنی است که چگونگی قرارگرفتن در مدار اهمیت دارد یعنی دارای قطب است.

خازن‌های الکترولیتی چون دارای قطب هستند، پلاریته دار هستند.

توان و انرژی

توان لحظه‌ای $p(t)$

$$p(t) = v(t) \times i(t)$$

حاصل ضرب ولتاژ در جریان در هر لحظه

انرژی در فاصله‌ی زمانی t_1 تا t_2

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt$$

توان متوسط در فاصله‌ی زمانی t_1 تا t_2

$$P_{av}(t_1, t_2) = \frac{W(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

با فرض اینکه ولتاژ جریان متناوب با دوره‌ی تناوب T باشد

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

با فرض ولتاژ و جریان سینوسی، توان برای :

① مقاومت

$$v_R(t) = V_m \sin\omega t \,,\quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \,,\quad T = 1/f$$

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{V_m}{R}\sin\omega t$$

$$P_R(t) = V_m \sin\omega t \times \frac{V_m}{R}\sin\omega t = \frac{V_m^2}{R}\sin^2\omega t$$

$$= \frac{V_m^2}{R}\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)$$

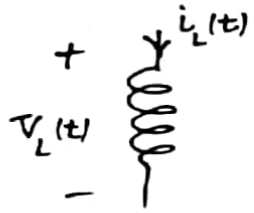
$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_m^2}{R}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_m^2}{2R}\,dt - \frac{V_m^2}{2RT}\int_0^T \cos 2\omega t\,dt$$

$$P_{av} = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{R^2 I_m^2}{2R} = \frac{1}{2} R I_m^2$$

در حالت DC توان مقاومت به اینصورت است : $P = \frac{V^2}{R} = RI^2$

۲) سلف



$v_L(t) = \frac{d\varphi}{dt}$, سلف خطی $\varphi = Li \Rightarrow v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$

فرض می‌کنیم: $i_L(t) = I_m \sin\omega t$

$$\Rightarrow L\frac{d}{dt}(I_m \sin\omega t) = L I_m \omega \cos\omega t$$

$$P(t) = v_L(t)\, i_L(t) = L\omega I_m^2 \sin\omega t \cos\omega t = \frac{1}{2} L\omega I_m^2 \sin 2\omega t$$

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} L\omega I_m^2 \sin 2\omega t\, dt = 0$$

پس سلف به طور متوسط هیچ توانی تلف نمی‌کند.

انرژی ذخیره در سلف

فرض کنیم جریان یک سلف را از زمان ۰ تا t به I رسانده‌ایم. انرژی ذخیره شده در سلف چقدر است؟

$$W(0,t) = \int_0^t P(t)\,dt = \int_0^t v_L(t)\, i_L(t)\,dt = \int_0^t L\frac{di_L}{dt} i_L\,dt$$

$$= L\int_0^I i_L\, di_L$$

$$= \frac{1}{2} L i_L^2 \Big|_0^I = \frac{1}{2} I^2 L = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{L}$$

$LI = \varphi$

انرژی ذخیره در خازن

فرض کنیم ولتاژ یک خازن را از ۰ تا t_1 به v_1 برسانیم. انرژی ذخیره شده در خازن؟

$$w(0,t_1)=?=\int_0^{t_1} p(t)\,dt$$

$$=\int_0^{t_1} v_c(t)\, i_c(t)\,dt=\int_0^{t_1} v_c(t)\, C\,\frac{dv_c}{dt}\,dt=\int_0^{v_1} C v\, dv$$

$$=\frac{1}{2}Cv^2\Big|_0^{v_1}=\frac{1}{2}Cv_1^2$$

$$Q_1=Cv_1 \Rightarrow w(0,t_1)=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

توجه: برای شکل موج های متناوب با مقدار متوسط صفر (مثلاً شکل موج سینوسی بدون شیفت) توان متوسط خازن نیز مشابه سلف، صفر بدست می آید. بدین معنی که خازن (ایده آل) به صورت متوسط هیچ توانی تلف نمی کند.

منابع
- ولتاژ یا جریان (ایده‌آل و واقعی)
- وابسته یا مستقل
- براساس شکل موج
  - ثابت
  - متناوب سینوسی
  - پله
  - پالس
  - شیب
  - ضربه
  - مشتق ضربه
  - ⋮

نماد منبع ولتاژ مستقل

نماد منبع ولتاژ وابسته
- وابسته به جریان
- وابسته به ولتاژ

نماد منبع جریان مستقل

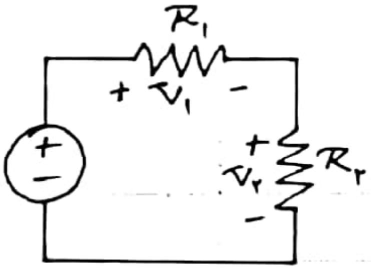
نماد منبع جریان وابسته
- وابسته به جریان
- وابسته به ولتاژ

منبع ایده‌آل و واقعی

در منبع ولتاژ ایده‌آل، مقاومت سری صفر است.

$R_s \to 0 \Rightarrow$ منبع به سمت ایده‌آل شدن می‌رود

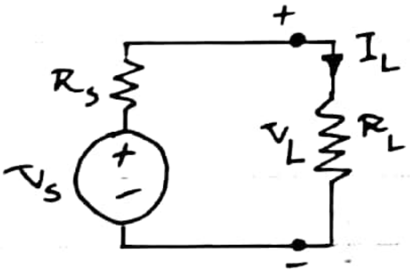
پیدا کردن اختلاف پتانسیل دو مقاومت وقتی منبع ایده‌آل است



$$V_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} V$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} V$$

پس می‌توانیم اینگونه نتیجه بگیریم:



$$V_L = \frac{R_L}{R_s+R_L} V_s$$

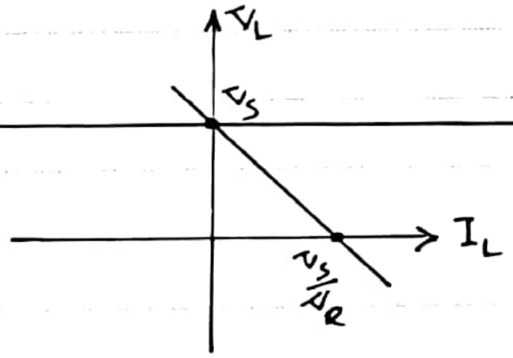
$KVL: \; -V_s + R_s I_L + V_L = 0$

$V_L = V_s - R_s I_L$

اگر $R_s = 0 \rightarrow V_L = V_s$

اگر $R_s \ll R_L \rightarrow V_L \simeq V_s$

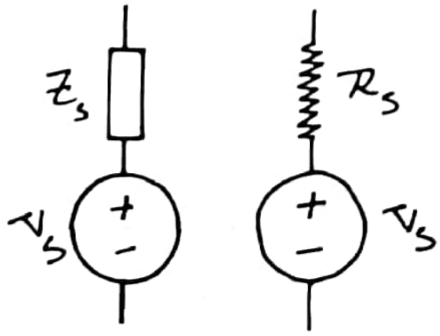
منبع ولتاژ ثابت نوع ایده‌آل



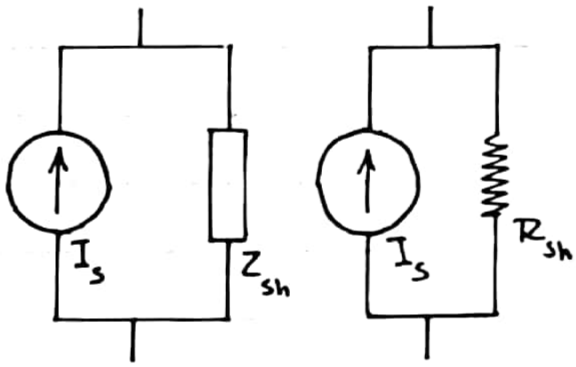
با افزایش جریان بار، ولتاژ بار کاهش می‌یابد

Subject ۲۴
Date ۹۶/۱۱/۵ جبرانی (شنبه)

تبدیل منابع واقعی به یکدیگر

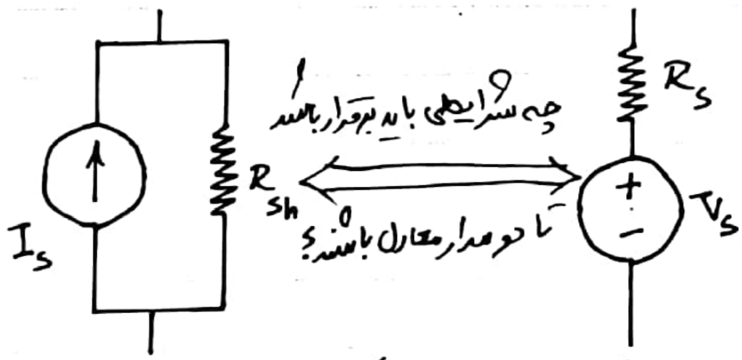


منبع ولتاژ واقعی در حالت $\begin{cases} R_s \to 0 \\ Z_s \to 0 \end{cases}$ به منبع ایده‌آل نزدیک می‌شود

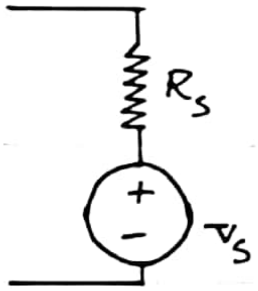


منبع جریان واقعی در حالت $\begin{cases} R_{sh} \to \infty \\ Z_{sh} \to \infty \end{cases}$ به حالت ایده‌آل نزدیک می‌شود

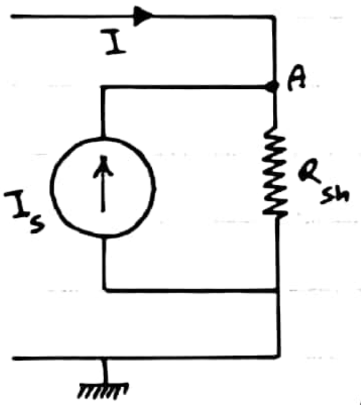
توجه: منبع ولتاژ خوب (نزدیک به ایده‌آل) به لحاظ مقاومتی (امپدانس) با منبع جریان خوب متفاوت است



دو مدار در صورتی معادل هستند که مشخصه‌ی آنها یکی شود به ازای اعمال هر مقدار ولتاژ برابر به دو مدار، جریان آنها یکی شود.



$$KVL \Rightarrow -V + R_s I + V_s = 0 \Rightarrow \boxed{V = R_s I + V_s} \quad (\mathrm{I})$$



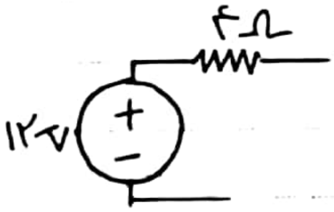
$$KVL(A) \Rightarrow -I - I_s + \frac{V}{R_{sh}} = 0$$

$$\boxed{V = R_{sh} I + R_{sh} I_s} \quad (\mathrm{II})$$

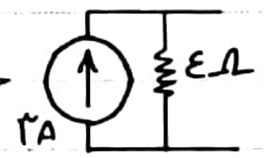
معادله‌ی (I) و (II) یکی هستند اگر $R_{sh} = R_s$ باشد، در اینصورت داریم:

$$I_s = \frac{V_s}{R_{sh}} = \frac{V_s}{R_s}$$

مثال: به منبع جریان تبدیل کنید



$$I_s = \frac{۱۲}{۴} = ۳A \rightarrow$$

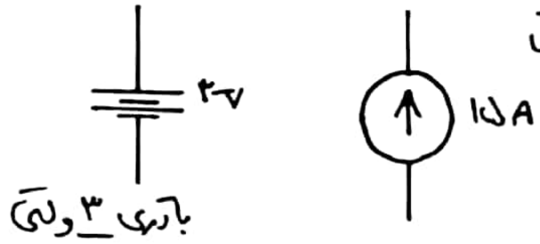


نمایش یک منبع ولتاژ با یک مقاومت (امپدانس) سری را مدل تونن می‌گوییم

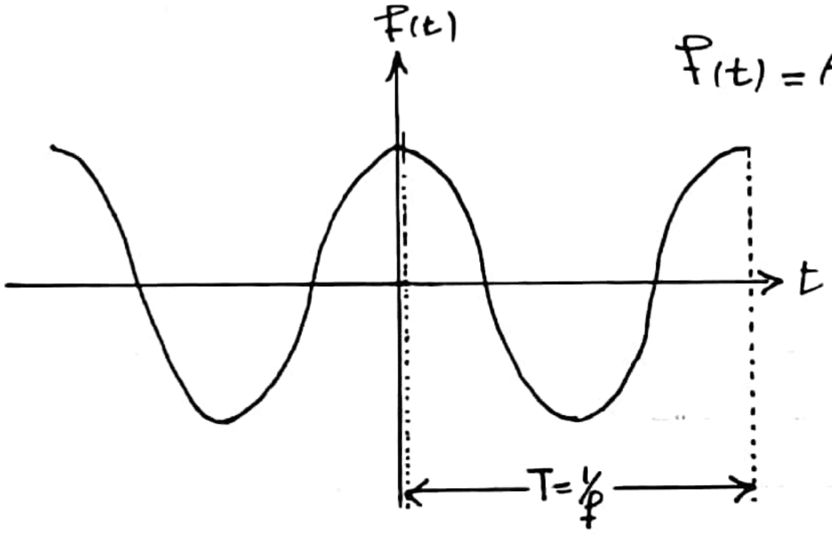
نمایش یک منبع جریان با یک مقاومت به صورت موازی را مدل نورتنی می‌گوییم

تقسیم بندی منابع از نظر شکل موج

۱- منبع ثابت : مقدار آن ثابت است و تابع زمان نیست



۲- منبع سینوسی (برق شهری) :



$$f(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ویژگی برق شهر در ایران

$$V(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$V_{rms} = V_{eff} = 220\,V \rightarrow f = 50\,Hz \rightarrow \omega = 2\pi f = 100\pi$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{f} \rightarrow T = 20\ msec$$

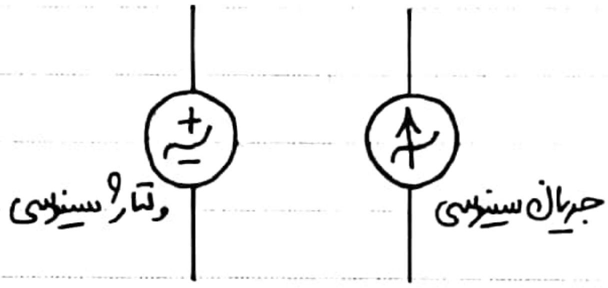
مقدار متوسط و موثر در شکل موج های متناوب

تابع متناوب $f(t)$ با دوره‌ی تکرار T

مقدار متوسط $f_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$

موثر $f_{eff} = f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$

$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$



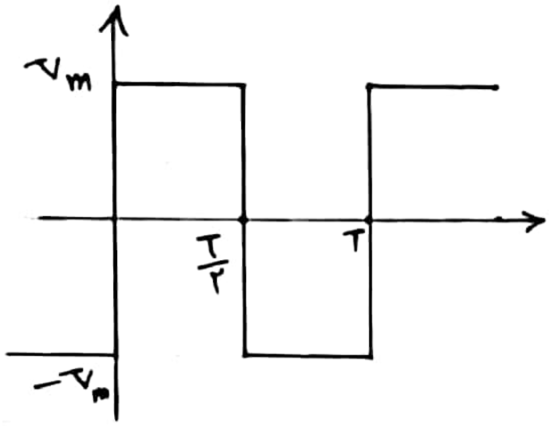
$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \sin^2(\omega t+\theta)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \left(\frac{1-\cos(2\omega t+\theta)}{2}\right)dt}$$

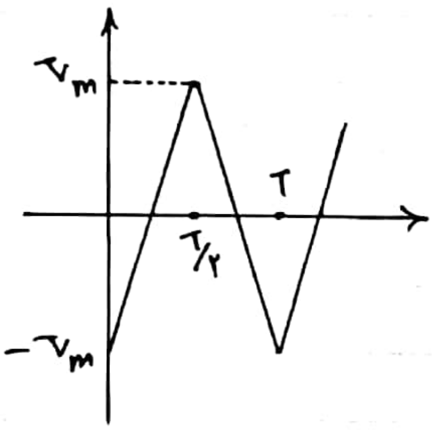
$$= V_m \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\cos(2\omega t+\theta)}{2}\,dt}$$

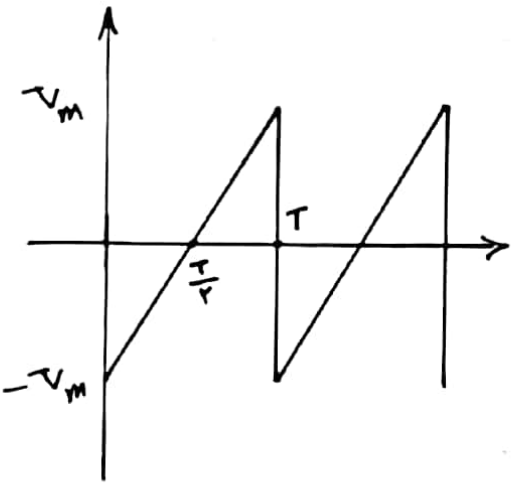
$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

مرسوم است که برای شکل موج متناوب و سینوسی مقدار موثر را به عنوان ولتاژ ذکر می کنند.

برای شکل موج های مربعی و مثلثی و دندان اره ای مقدار موثر را حساب کنید

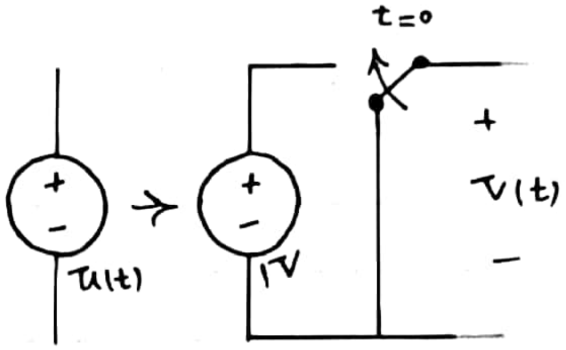






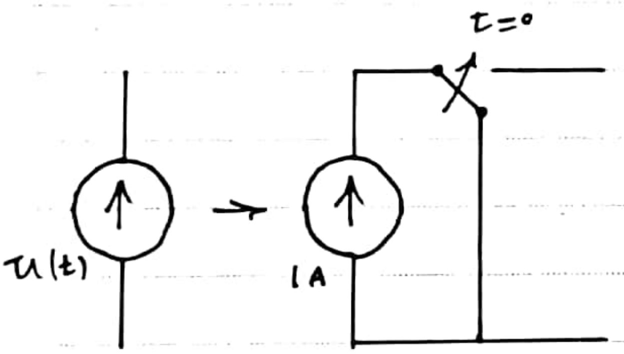
منبع پله

پله واحد
$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

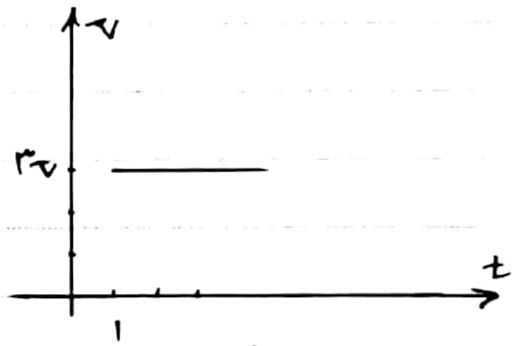


(کلید دوسر خروجی را اتصال کرده و در t=0 ، ۱۲ ولت را متصل می کند)

$$v(t)=12u(t)=\begin{cases}12 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



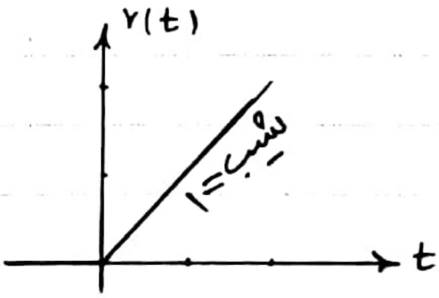
مدل منبع جریان $u(t)$



$$v(t)=3u(t-1)$$

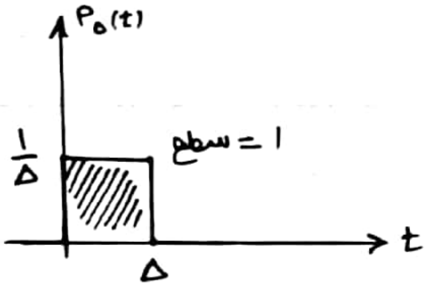
منبع شیب واحد

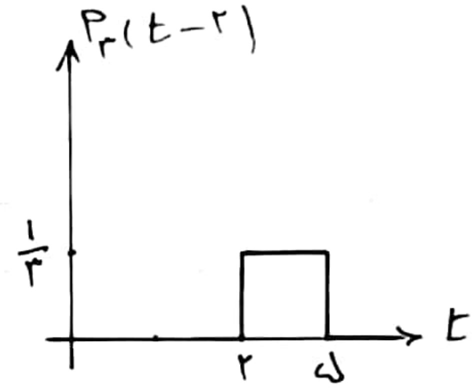
$$r(t)=\begin{cases}t & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}\qquad r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)\,dt \rightarrow u(t)=\frac{dr(t)}{dt}$$



منبع پالس $P_\Delta(t)$

$$P_\Delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta\\ 0 & \text{سایر زمان ها}\end{cases}$$

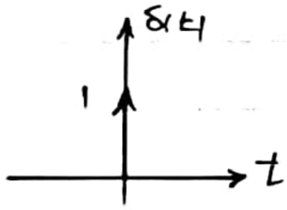


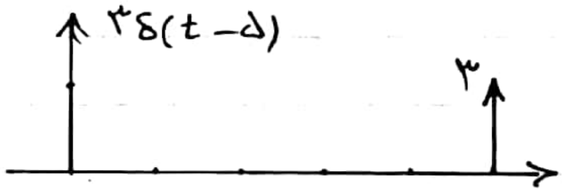


ضربه واحد $\delta(t)$

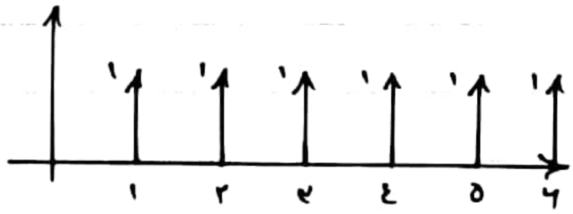
$$\lim_{\Delta\to 0} P_\Delta(t)=\delta(t) \Rightarrow \delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \text{به سمت } +\infty & t=0\end{cases}$$

(سطح زیر نمودار همیشه ۱ است)





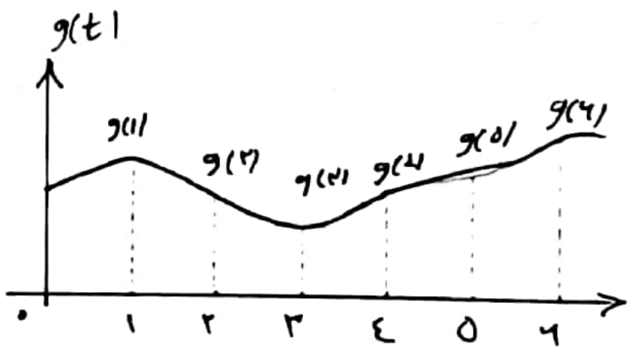
$$f(t)=\sum_{n=0}^{6}\delta(t-n)$$



کمی بیشتر از صفر

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt=1$$

کمی کمتر از صفر



$$\int_{-\infty}^{t} f(t)\,g(t)\,dt$$

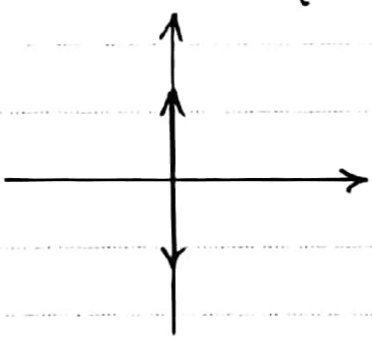
خاصیت نمونه برداری تابع ضربه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} g(t)\,\delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} g(0)\,\delta(t)\,dt = g(0)$$

یک تابع پیوسته با مقادیر محدود

مشتق تابع ضربه (دیراک)

$\underset{\Delta \to 0}{P_\Delta(t)} = \delta(t)$



$\int \delta'(t) = \delta(t)$

بسیاری از شکل موج ها را می توان با ترکیب شکل موج های گفته شده ایجاد کرد

Subject
Date

فصل ۳

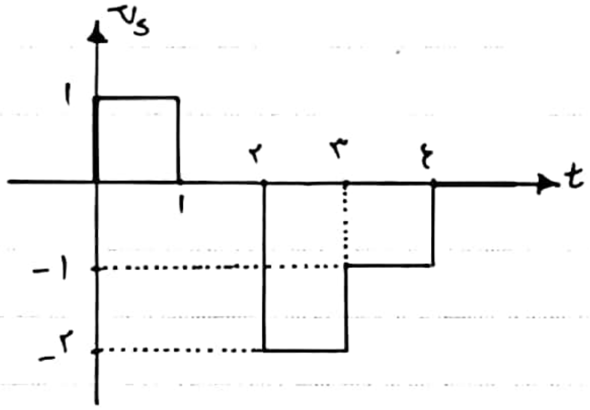
مدارهای ساده

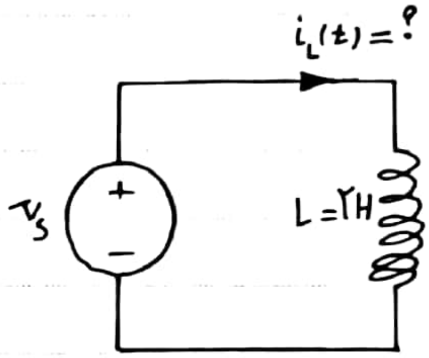
PAPCO

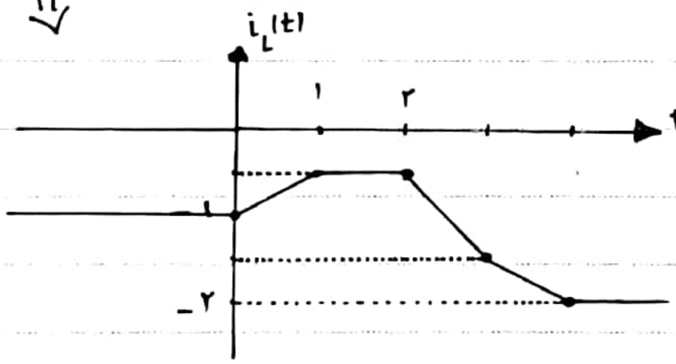
محاسبه‌ی جریان (ولتاژ) خازن (یا سلف) از ولتاژ (جریان) آن

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \rightarrow i_L(t) = \underbrace{I_0}_{\text{جریان اولیه سلف}} + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)\,dt$$

مثال







$\boxed{0<t<1} \rightarrow v_L(t) = 1v$

$$i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)\,dt = -1 + \frac{1}{۲}\int_0^t dt = -1 + \frac{1}{۲}t$$

$\boxed{t=1} \Rightarrow i_L(t) = -\frac{1}{۲}A$

$\boxed{1<t<۲} \rightarrow v_L = 0 \quad , \quad i_L(1) = -\frac{1}{۲}A$ → جریان اولیه برای این محدوده‌ی زمانی

$$i_L(t) = i_L(1) + \frac{1}{L}\int_1^t v_L(t)\,dt = i_L(1) \Rightarrow i_L(۲) = i_L(1) = -\frac{1}{۲}A$$

Subject ۳۳

Date

$$\boxed{2<t<3} \rightarrow v_L(t) = -2v$$

$$i_L(t) = i_L(2) = i_L(2) + \frac{1}{L}\int_2^t v_L(t)\,dt = -\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\int_2^t -2t$$

$$= -\frac{1}{2} - t\Big|_2^t = \frac{3}{2} - t$$

$$\boxed{t=3} \rightarrow i_L(t) = -\frac{3}{2}$$

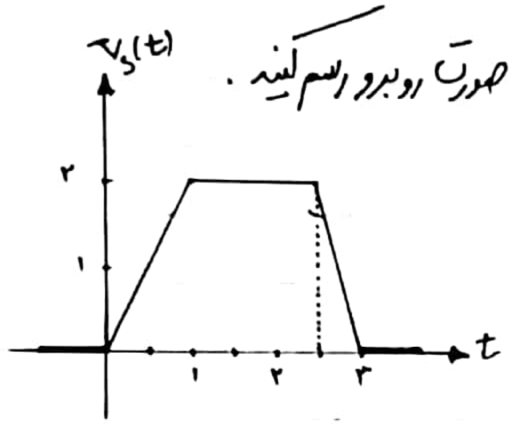
$$\boxed{3<t<4} \rightarrow v_L(t) = -1 \,,\; i_L(t) = i_L(3) + \frac{1}{2}\int_3^t -1\,dt$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}t$$

$$\boxed{t=4} \rightarrow i_L(t) = -2$$

$$\boxed{t>4} \rightarrow v_L(t) = 0 \rightarrow i_L(t) = i_L(4) = -2A$$

$i_L(t)$ را برای مدار مثال قبل با شکل ولتاژ منبع به صورت روبرو رسم کنید.



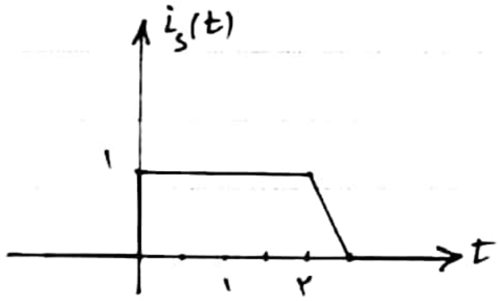
$\boxed{0<t<1} \rightarrow v_s(t) = 2t$

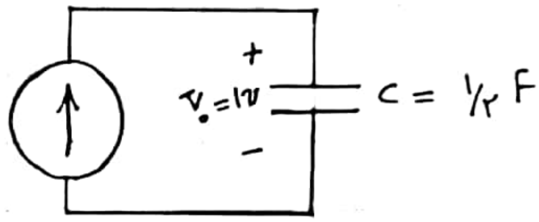
$$i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int_0^t v_s(t)\,dt = -1 + \frac{t^2}{2}$$

$\boxed{t=1} \rightarrow i_L(t) = -\frac{1}{2}$

توجه: در مثال های قبل با وجود پرش در ولتاژ، جریان سلف پیوسته بوده است. سلف مایل نیست تغییرات ناگهانی جریان داشته باشد (مگر مدار اجبار کند)

مثال





$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} \quad , \quad v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t<0 \rightarrow i_c(t)=0 \\ v_c(t) = v_c(0) = 1v \end{array}}$$

$$0<t<2 \rightarrow i_c(t) = 1A \quad , \quad v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t')\,dt' = 1+2t$$

$$t=2 \rightarrow v_c(t) = 5v$$

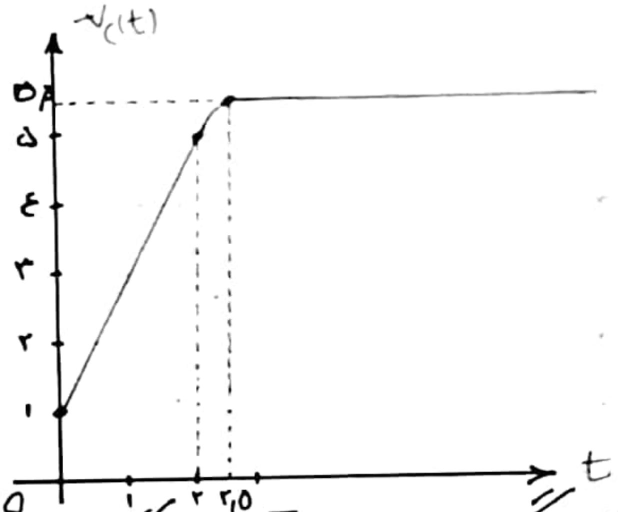
$$2<t<2.5 \rightarrow i_s(t) = -2t+K = -2\times 2.5+K \rightarrow K=5$$

$$i_c(t) = -2t+5$$

$$v_c(t) = v_c(2) + \frac{1}{C}\int_2^t i_c(t')\,dt' = 5+2\int_2^t(-2t'+5)\,dt' = -2t^2+10t-7$$

$$t=2.5=\frac{5}{2} \rightarrow v_c(t) = \frac{-25}{2}+25-7 = 5.5$$

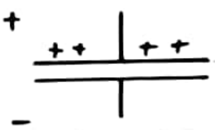
$$t>2.5 \rightarrow i_c(t)=0 \rightarrow v_c(t) = v_c(2.5) = 5.5v$$



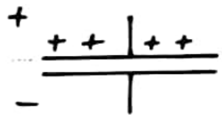
ولتاژ خازن هم تمایل دارد با وجود ناپیوستگی در جریان، پیوسته بماند (مگر مجبور شود) مثلاً اگر دو خازن که ولتاژ متفاوت دارند، موازی شوند

اصل بقای بار: در یک محیط بسته که با خارج تبادل بار ندارد، مجموع بارها در تمام زمان‌ها باید ثابت باشد.

قبل از موازی شدن



$Q_1 = C_1 V_1$

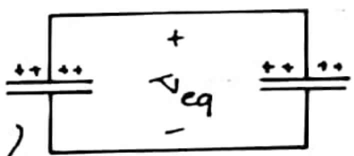


$Q_2 = C_2 V_2$

بار در محیط بسته: $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2$

$$W = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$$

بعد از موازی شدن



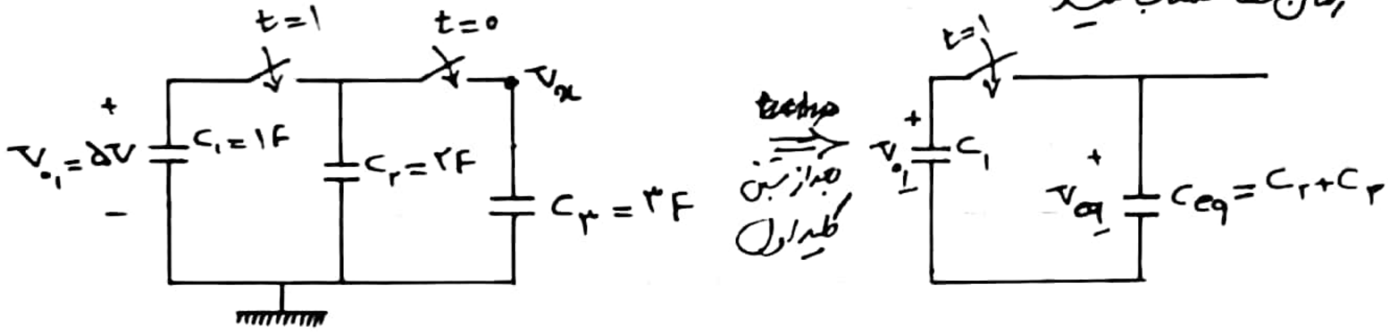
$Q'_2 = C_2 V_{eq}$, $Q' = Q'_1 + Q'_2$

بار خازن C_1 بعد از موازی شدن $\rightarrow Q'_1 = C_1 V_{eq}$

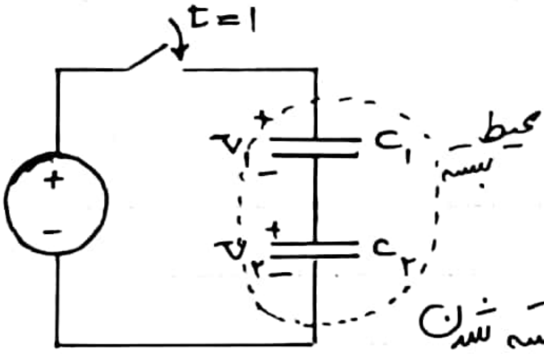
$$Q' = C_1 V_{eq} + C_2 V_{eq} \Rightarrow \boxed{Q = Q'} \Rightarrow C_1 V_1 + C_2 V_2 = C_1 V_{eq} + C_2 V_{eq}$$

$$\rightarrow V_{eq} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} \quad , \quad W = \frac{1}{2} C_{eq} V_{eq}^2$$

مثال: v_x را در همه‌ی زمان‌ها محاسبه کنید و انرژی ذخیره شده در کل مجموعه را در تمام زمان‌ها حساب کنید



مثال: با فرض اینکه در خازن ولتاژ اولیه وجود نداشته باشد. با بسته شدن کلید ولتاژ هر کدام از خازن ها چقدر می شود؟



قبل از بسته شدن کلید: $v_1 = v_2 = 0$

بار محیط بسته $\to Q = 0$

با بسته شدن کلید $\to v_1' + v_2' = v_S$

بار محیط بسته با بستن کلید $Q' = -c_1 v_1' + c_2 v_2' = Q = 0$

$$v_1' + v_2' = v_S$$

$$c_1 v_1' = c_2 v_2' \to \frac{v_1'}{v_2'} = \frac{c_2}{c_1}$$

سری و موازی کردن المان ها

مقاومت

- سری (حتماً باید هم جریان باشند): $R_{eq}=\sum_{i=1}^{n} R_i$ برای n مقاومت سری
- موازی (حتماً از هر دو سر به هم اتصال کوتاه هستند و هم ولتاژ شده‌اند): $G=\frac{1}{R}$, $G_{eq}=\sum_{i=1}^{n} G_i$ برای n مقاومت موازی

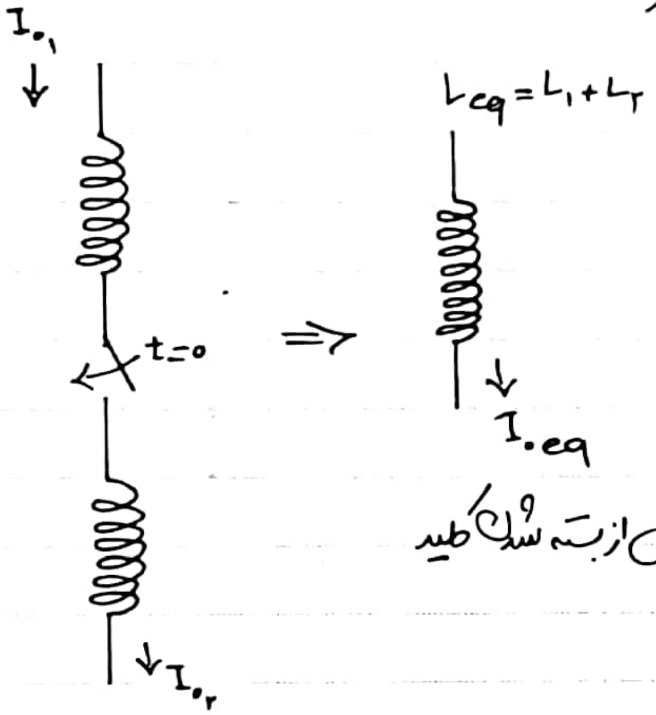
خازن

- موازی: $C_{eq}=\sum_{i=1}^{n} C_i$
- سری: $\frac{1}{C_{eq}}=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$

سلف

- سری: $L_{eq}=\sum_{i=1}^{n} L_i$
- موازی: $\frac{1}{L_{eq}}=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$

سری کردن سلف‌ها با جریان اولیه متفاوت



$L_{eq} = L_1 + L_2$

اصل بقای شار:

$$\begin{cases} \varphi_{01} = L_1 I_{01} \\ \varphi_{02} = L_2 I_{02} \end{cases}$$

شار مجموعه قبل از بسته شدن کلید $\varphi = \varphi_{01} + \varphi_{02}$

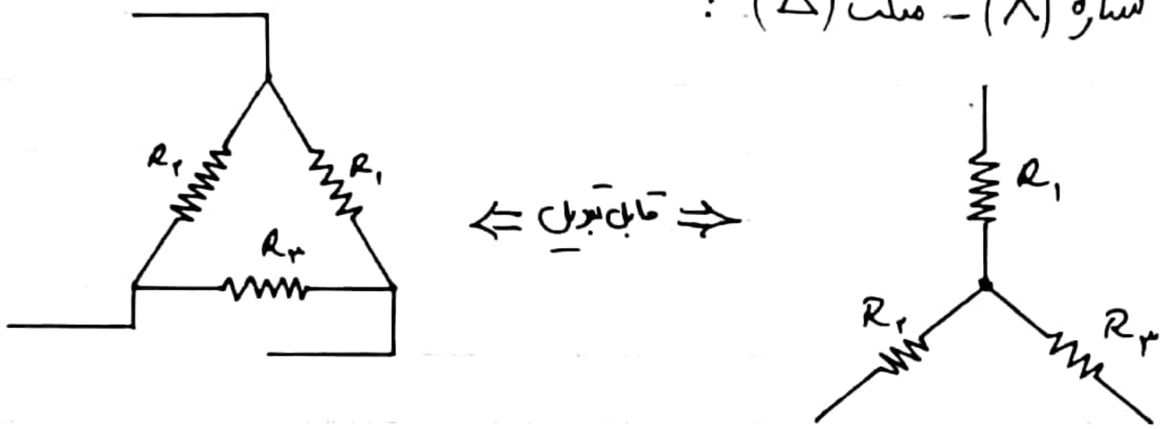
$$= L_1 I_{01} + L_2 I_{02}$$

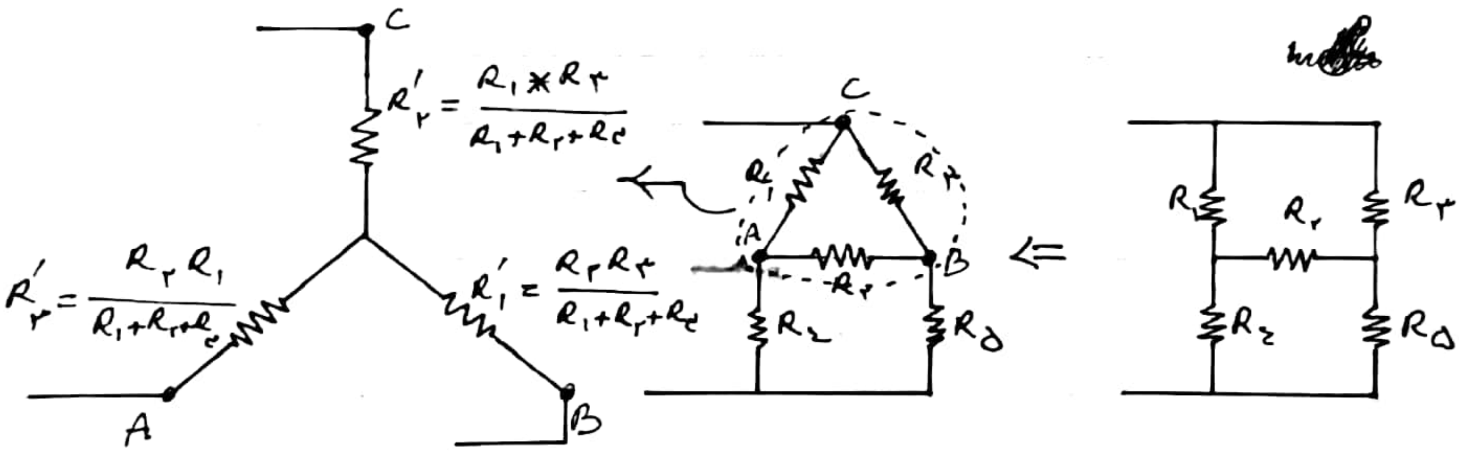
شار مجموعه بعد از بستن کلید $\varphi' = L_{eq} I_{0eq} = (L_1 + L_2) I_{0eq}$

$$\varphi = \varphi' \Rightarrow L_1 I_{01} + L_2 I_{02} = (L_2 + L_1) I_{0eq} \rightarrow I_{0eq} = \frac{L_1 I_{01} + L_2 I_{02}}{L_1 + L_2}$$

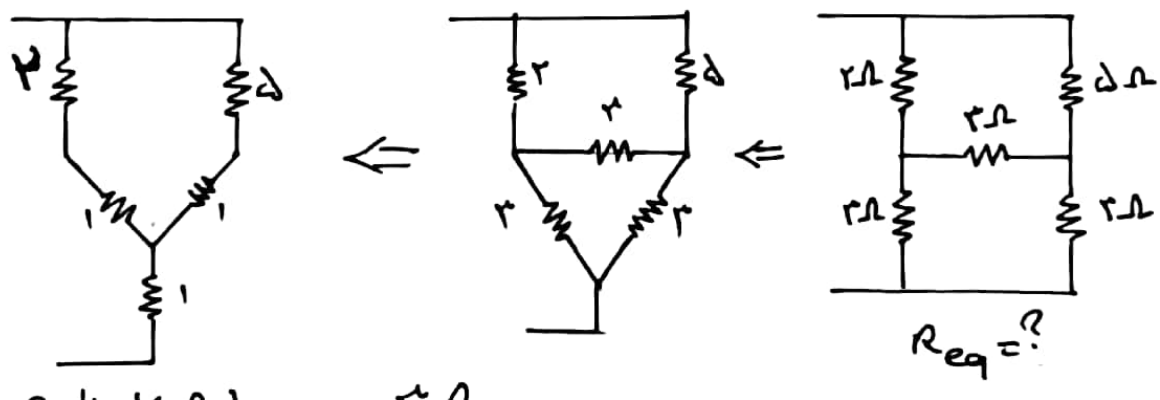
ساده سازی شبکه های مقاومتی

تبدیل ستاره (λ) - مثلث (Δ) :





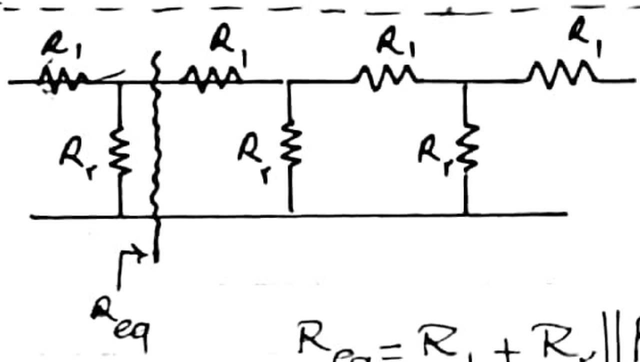
مثال :



$$R_{eq} = (۳Ω \,||\, ۶Ω) + ۱ = ۳Ω$$

تمرین : روابط تبدیل ستاره به مثلث را بدست آورید

نردبان بینهایت



$$R_{eq} = R_1 + R_2 \| R_{eq}$$

به معادله‌ی درجه ۲ می‌رسیم و یکی از جواب‌های آن را انتخاب می‌کنیم.

مثال: $R_1 = 2\Omega \,,\, R_2 = 3\Omega$

$$R_{eq} = 2 + 3 \| R_{eq} \Rightarrow R_{eq} = 2 + \frac{3R_{eq}}{3+R_{eq}}$$

$$3R_{eq} + R_{eq}^2 = 6 + 2R_{eq} + 3R_{eq} \Rightarrow R_{eq}^2 - 2R_{eq} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{1 \pm \sqrt{1+6}}{1} = 1 \pm \sqrt{7}$$

در این جا مقاومت منفی قابل قبول نیست. $\Rightarrow R_{eq} = 1+\sqrt{7}$

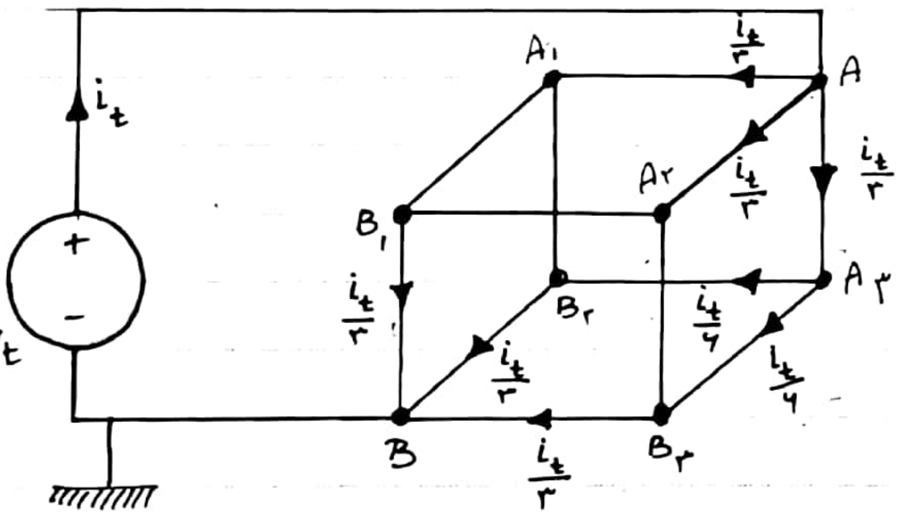
ساده سازی با استفاده از تشخیص مسیرهای هم جریان و گره های هم پتانسیل

در مدارهای متقارن با تشخیص تقارن ها، مدار را می توان ساده کرد.

نقاط هم پتانسیل را می توان به هم اتصال کوتاه کرد.

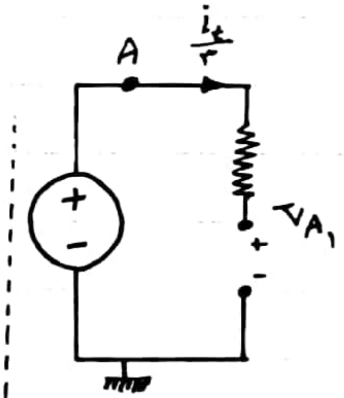
اگر از مسیری جریان عبور نکند آن را می توان مدار باز در نظر گرفت.

مثال: در مکعب زیر مقاومت هم اضلاع R است. مقاومت دیده شده از قطر اصلی مکعب چقدر است؟



قسمتی از مدار

⇓



$$-v_t + \frac{i_t}{3}R + v_{A_1} = 0$$

نقاط هم پتانسیل

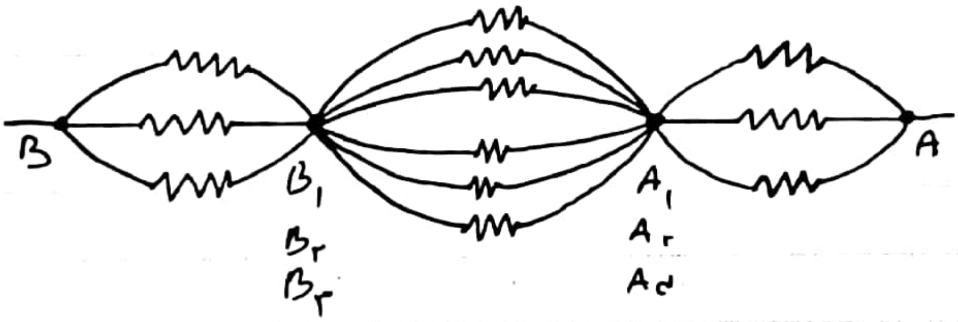
$$\begin{cases} v_A = v_t \\ v_{A_1} = v_A - \frac{i_t}{3}R \\ v_{A_2} = v_A - \frac{i_t}{3}R \\ v_{A_3} = v_A - \frac{i_t}{3}R \end{cases} \Rightarrow v_{A_1} = v_{A_2} = v_{A_3}$$

به همین طریق :

$$V_{B_1} = V_{B_2} = V_{B_3}$$

$$\begin{cases} V_{B_1} = \frac{i_t}{3} R \\ V_{B_2} = \frac{i_t}{3} R \\ V_{B_3} = \frac{i_t}{3} R \end{cases}$$

با اتصال گره های هم پتانسیل به یکدیگر داریم :

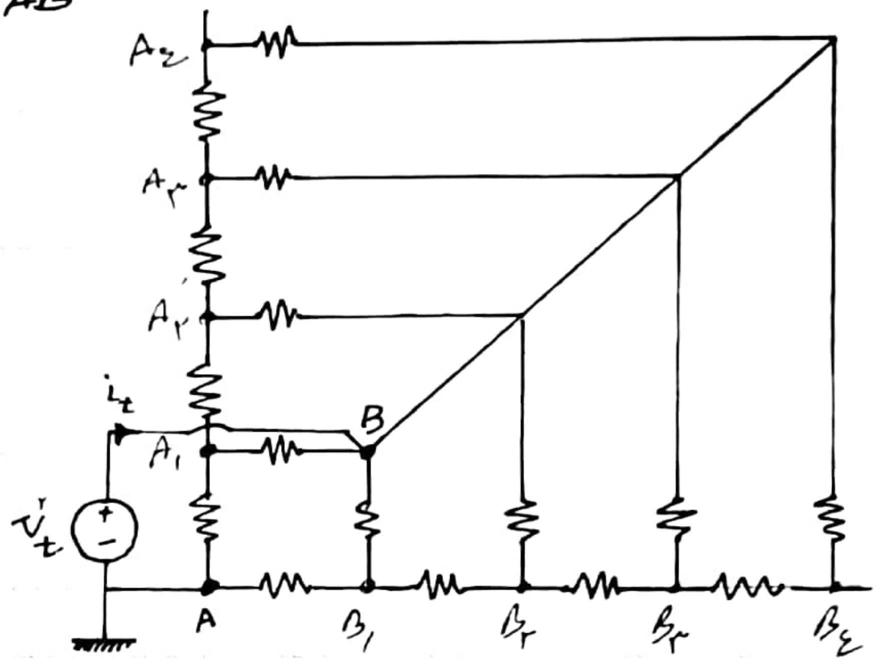


$$R_{AB} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6} R$$

روش سوم : پس تشخیص جریان هر شاخه می توان با استفاده از KVL مقاومت را محاسبه کرد.

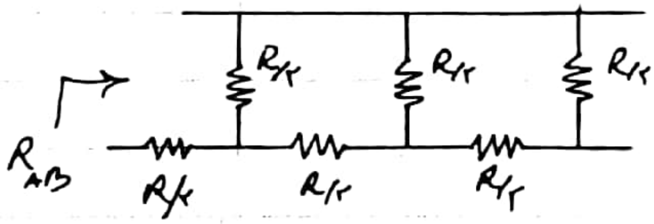
$$V_{AB} = V_t = \frac{i_t}{3} \times R + \frac{i_t}{6} \times R + \frac{i_b}{3} \times R = \frac{5}{6} R$$

با فرض اینکه همه‌ی مقاومت‌ها R هستند، $R_{AB}=?$



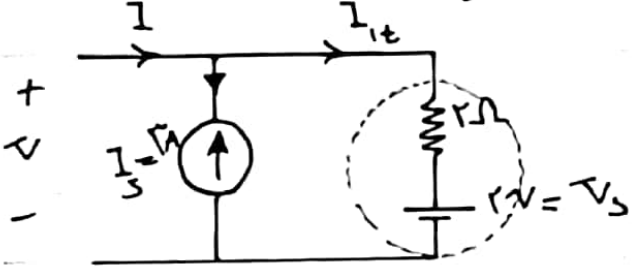
$$\begin{cases} V_{A_1} = V_{B_1} \\ V_{A_2} = V_{B_2} \\ V_{A_4} = V_{B_3} \\ \vdots \end{cases}$$

با اتصال هم‌پتانسیل‌ها به هم داریم:

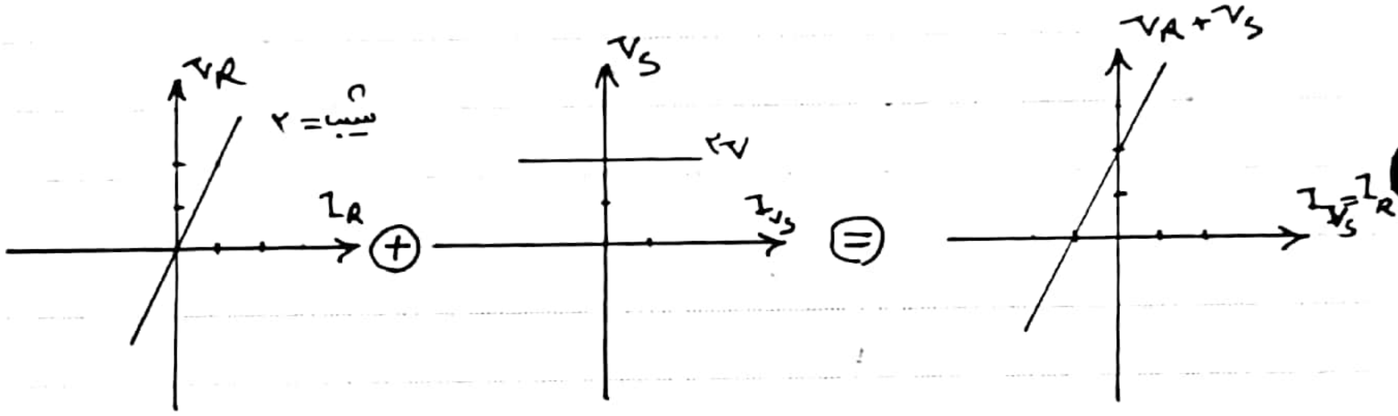


$$R_{AB} = \frac{R}{2} + \left(\frac{R}{2} \,\|\, R_{AB}\right) \rightarrow R_{AB} = \frac{R}{2} + \frac{\frac{R R_{AB}}{2}}{\frac{R}{2} + R_{AB}}$$

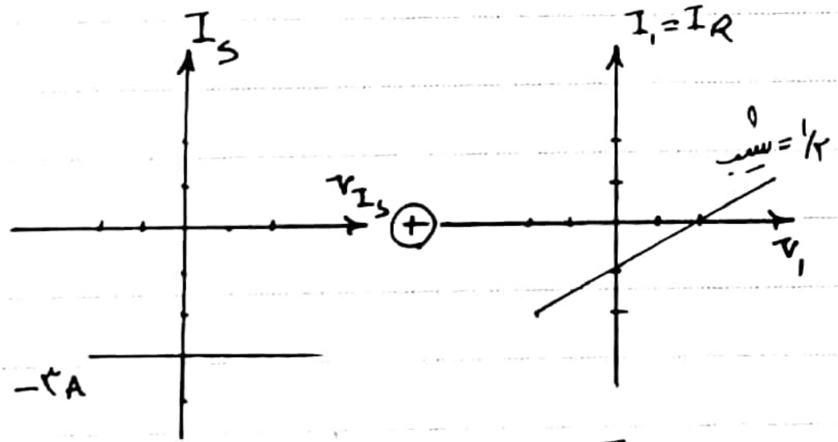
سری و موازی کردن المان های دلخواه با استفاده از مشخصه ی آن ها

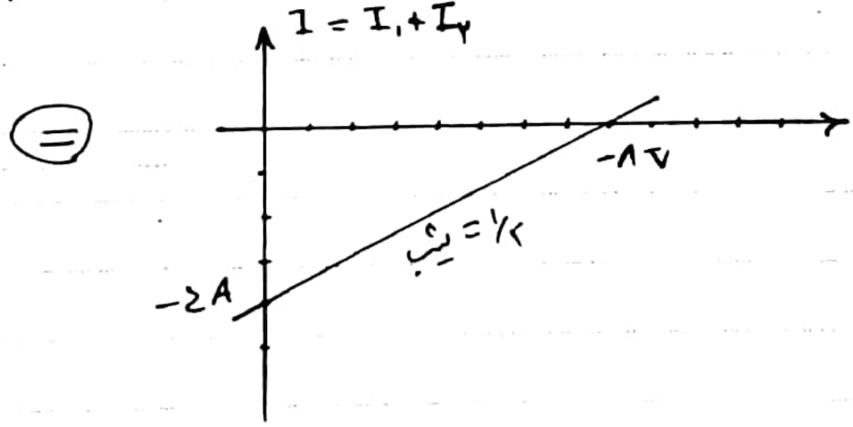


در المان های سری در جریان های برابر و ولتاژها باهم جمع می شوند

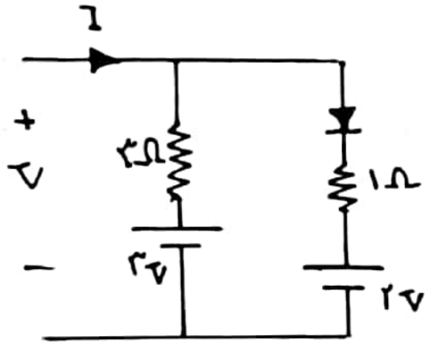


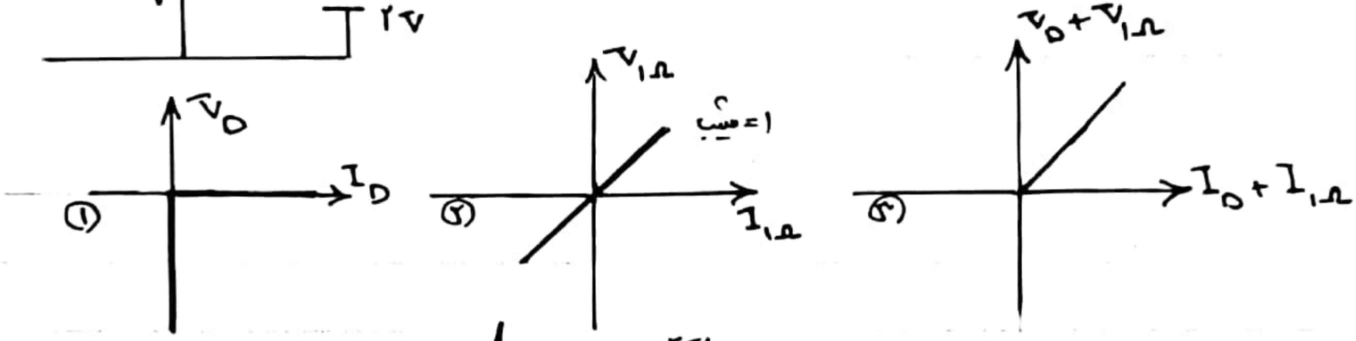
در المان های موازی ولتاژها برابراند و جریان ها به صورت جبری باهم جمع می شوند.

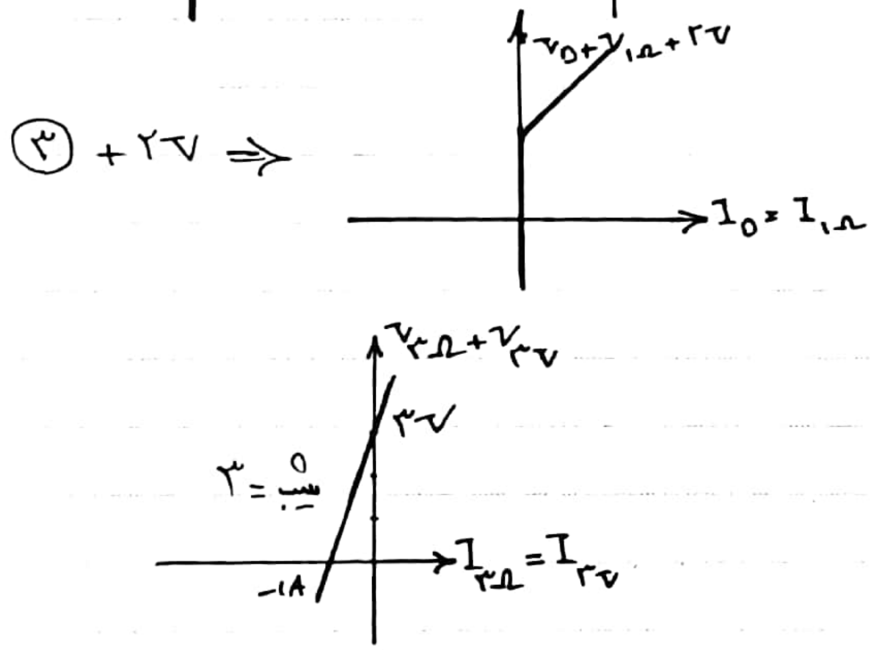


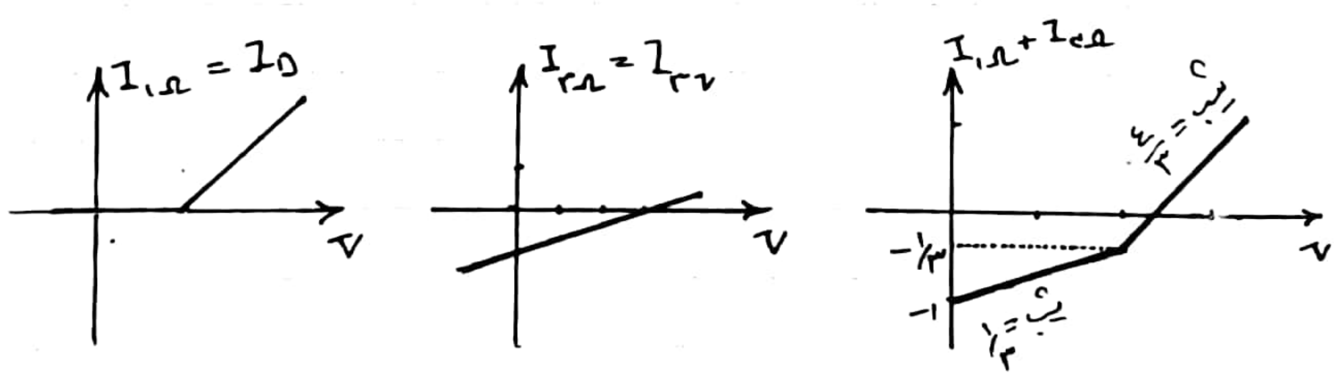


مثال : V ـ I کل چیست؟









Subject ۲۸
Date ۹۶,۱۲,۱۵ سه‌شنبه

روش های منظم تحلیل مدارهای الکتریکی

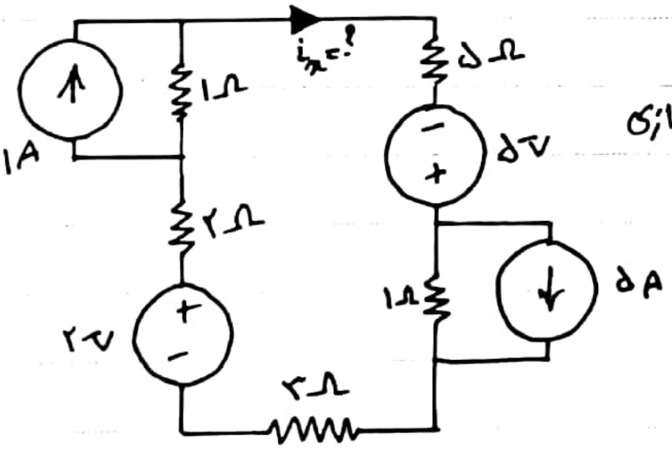
گره ← براساس محاسبه‌ی پتانسیل گره ها
مش ← براساس محاسبه‌ی جریان مش ها

حلقه اساسی
کات اساسی } در مدار ۲
معادلات حالت

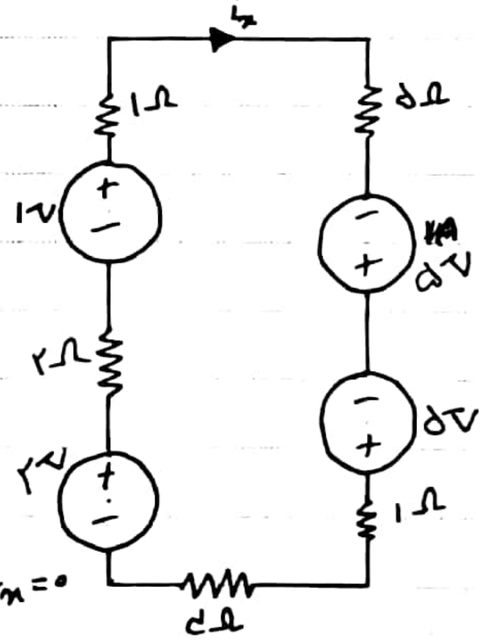
مراحل روش گره

۱- مدار را حتی الامکان و در صورت نیاز ساده می کنیم
(استفاده از معادلات سری وموازی ، ستاره - مثلث ، تقارن وتشخیص هم پتانسیل ها وهم جریان ها، تبدیل منابع)

مثال:



ساده سازی ⟹



$$KVL \rightarrow -۲ + ۲i_x - ۱ + i_x + ۵i_x - ۵ - ۵ + i_x + ۳i_x = ۰$$

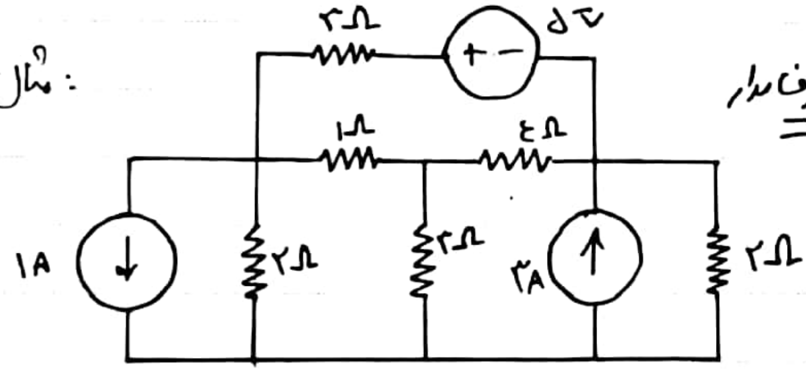
$$۱۲ i_x = ۱۳ \rightarrow i_x = \frac{۱۳}{۱۲}$$

Subject ٤٤
Date

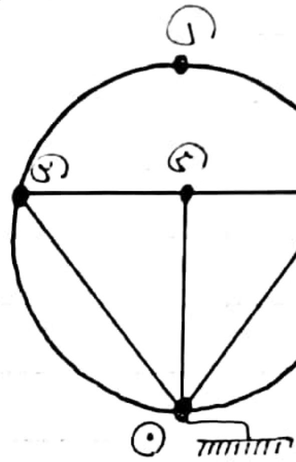
۲- گره‌های مدار را مشخص می‌کنیم. یک گره که بیشترین شاخه به آن متصل است را به عنوان گره‌ی مبنا در نظر می‌گیریم و پتانسیل آن را مرجع (صفر) در نظر می‌گیریم.

توجه: معمولاً گرهی که بیشترین شاخه به آن متصل است، گره مبنا در نظر گرفته می‌شود

مثال:



گراف مدار



۳- گره‌های مدار را شماره گذاری می‌کنیم (شماره‌ی گره‌ی مبنا صفر گرفته شود) و روابط KCL را برای گره‌ها شماره گذاری شده (به جز مبنا) می‌نویسیم.

٤- روابط KCL را فقط برحسب پتانسیل گره‌ها (V_1، V_2، و ...) نسبت به مبنا مرتب می‌کنیم و مجهولات اضافی را برحسب پتانسیل گره‌ها جایگذین می‌کنیم.

۵- به یک دستگاه n معادله، n مجهول می‌رسیم که با حل آن به روش کرامر یا هر روش دیگری پتانسیل گره‌ها نسبت به مبنا بدست می‌آید.

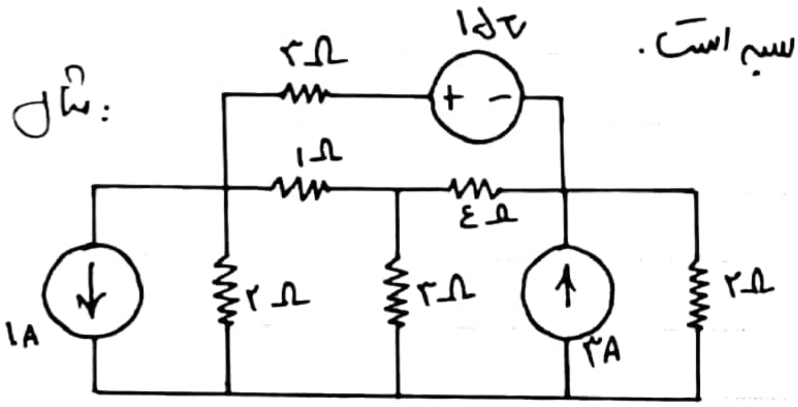
تعداد کل گره‌ها : n_t

$$n = n_t - 1$$

PAPCO

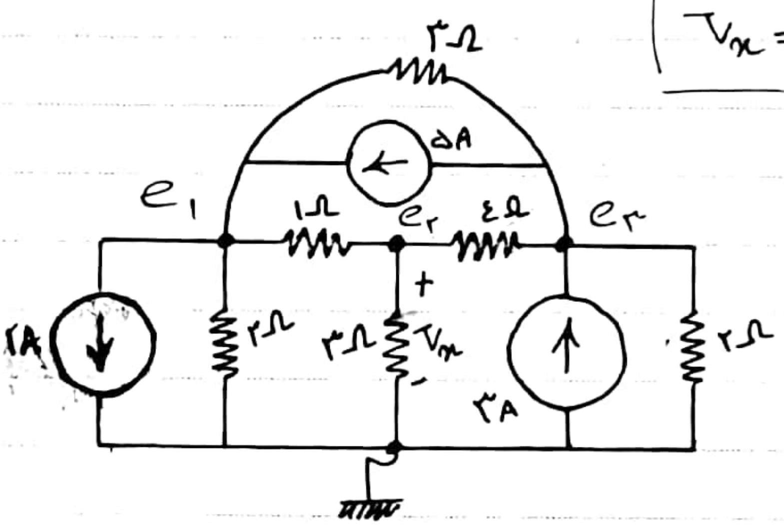
۶- سایر پارامترهای مورد نیاز شامل جریان شاخه‌ها، توان شاخه‌ها و ... با محاسبه‌ی پتانسیل گره‌ها نسبت به مبنا در گام ۵، قابل محاسبه است.

مثال:

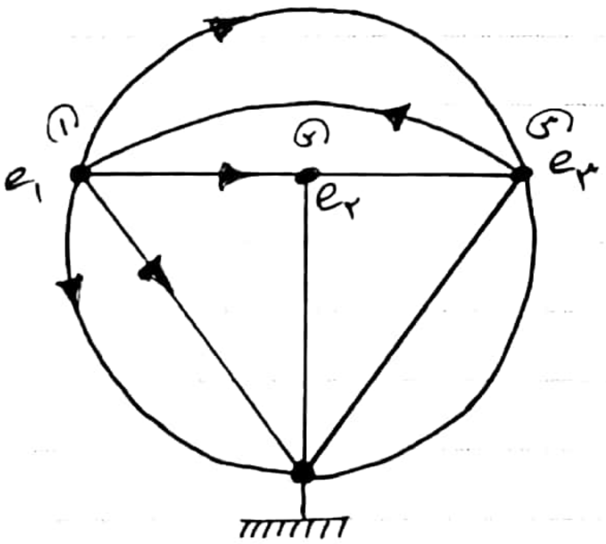


ساده‌سازی مدار

$V_x = ?$



گراف مدار ساده شده



$$KCL① \rightarrow 1A + \frac{e_1 - 0}{2} + \frac{e_1 - e_2}{1} - 5 + \frac{e_1 - e_3}{3} = 0$$

$$\Rightarrow 11e_1 - 6e_2 - 2e_3 = 24$$

$$KCL(۲) \Rightarrow \frac{e_۲}{۳} + \frac{e_۲ - e_۳}{۴} + \frac{e_۲ - e_۱}{۱} = ۰$$

$$۴e_۲ + ۳e_۲ - ۳e_۳ + ۱۲e_۲ - ۱۲e_۱ = ۰$$

$$\Rightarrow -۱۲e_۱ + ۱۹e_۲ - ۳e_۳ = ۰$$

$$KCL(۳) \rightarrow -۲ + \frac{e_۳}{۲} + ۵ + \frac{e_۳ - e_۱}{۳} + \frac{e_۳ - e_۲}{۴} = ۰$$

$$۶e_۳ + ۴e_۳ - ۴e_۱ + ۳e_۳ - ۳e_۲ = -۲۴$$

$$\rightarrow -۴e_۱ - ۳e_۲ + ۱۳e_۳ = -۲۴$$

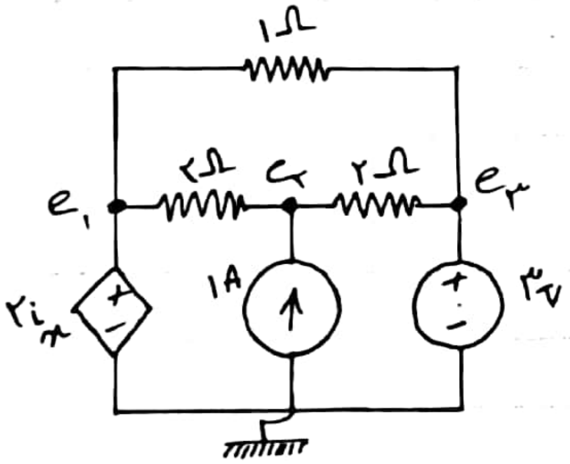
$$\left\{\begin{array}{l} ۱۱e_۱ - ۶e_۲ - ۲e_۳ = ۲۴ \\ -۱۲e_۱ + ۱۹e_۲ - ۳e_۳ = ۰ \\ -۴e_۱ - ۳e_۲ + ۱۳e_۳ = -۲۴ \end{array}\right\} \Rightarrow v_x = e_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۱۱ & ۲۴ & -۲ \\ -۱۲ & ۰ & -۳ \\ -۴ & -۲۴ & ۱۳ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱۱ & -۶ & -۲ \\ -۱۲ & ۱۹ & -۳ \\ -۴ & -۳ & ۱۳ \end{vmatrix}}$$

$$v_x = e_۲ = ۱٫۹۲$$

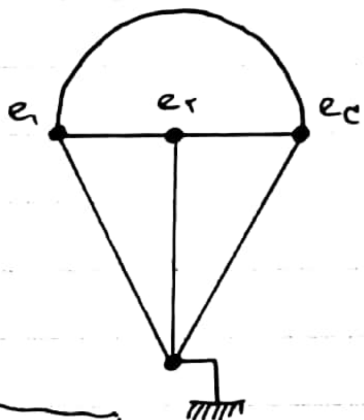
نکات روش گره

۱- اگر شاخه‌ای فقط شامل یک منبع ولتاژ باشد (مستقل یا وابسته) نسبت به گره مبنا باشد، برای آن گره KCL نمی‌نویسیم.

مثال: به روش گره i_x را محاسبه کنید.



گراف



$$\boxed{KCL② \Rightarrow -1 + \frac{e_2-e_3}{2} + \frac{e_2-e_1}{2} = 0}$$

برای گره‌های ① و ③ KCL نمی‌نویسیم:

$$e_1 = 2i_x = 2\times\frac{e_3-e_2}{2} = e_3 - e_2 \to e_1 = 3 - e_2$$

$$\Rightarrow e_3 = 3V$$

$$e_2 - e_3 + e_2 - e_1 = 2 \to 2e_2 - e_3 - e_1 = 2$$

$$2e_2 - 3 - (3 - e_2) = 0 \to 3e_2 = 6 \to e_2 = 2V,\quad e_1 = -1V$$

$$\boxed{i_x = e_1/2 = -1/2\ A}$$

توان منبع ولتاژ را حساب می کنیم

$$KCL(3) \Rightarrow i_{3V} + i_x + \frac{e_3 - e_1}{1} = 0$$

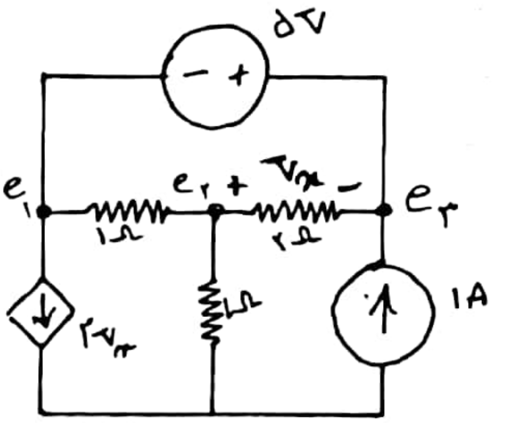
$$i_{3V} = -i_x - e_3 - e_1 = -1/2 - 3 + 1 = -5/2$$

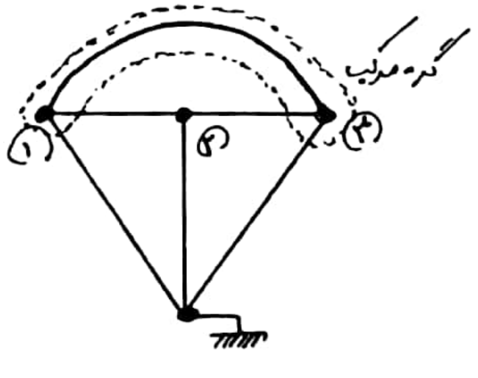
توان منبع ۳ ولتی $P_{3V} = 3V \times i_{3V} = 3 \times (-\frac{5}{2}) = -\frac{15}{2}$

علامت منفی یعنی توان به مدار داده است.

۲- اگر بین دو گره که هیچکدام گره مبنا نباشند، یک منبع ولتاژ (وابسته یا مستقل) قرار گرفته باشد، به جای نوشتن KCL در تک تک این گره ها، برای گره مرکب دربرگیرنده این دو گره KCL می نویسیم و یک رابطه نیز از برابر قرار دادن اختلاف پتانسیل دو گره با ولتاژ منبع بدست می آوریم.

مثال: به روش گره ولتاژ V_x را حساب کنید.





$$KCL(\text{گره مرکب}) \Rightarrow \frac{e_1 - e_2}{1\Omega} + 2V_x + \frac{e_3 - e_2}{2\Omega} - 1 = 0$$

$$2e_1 - 2e_2 + 4V_x + e_3 - e_2 = 2 \Rightarrow \boxed{2e_1 - 3e_2 + e_3 + 4V_x = 2} \quad (I)$$

Subject ۵۴
Date

(II) $v_x = e_۲ - e_۳$

(I),(II) $\Rightarrow e_۳ - e_۱ = ۵$, $e_۳ = ۵ + e_۱$

$۲e_۱ + e_۲ - ۱۵ - ۲e_۳ = ۲ \Rightarrow -e_۱ + e_۲ = ۱۷$

$KCL(۲) \Rightarrow \frac{e_۲}{۱} + \frac{e_۲ - e_۳}{۲} + \frac{e_۲ - e_۱}{۱} = ۰$

$۵e_۲ - e_۳ - ۲e_۱ = ۰ \Rightarrow e_۳ = ۵ + e_۱$

$۵e_۲ - ۵ - e_۱ - ۲e_۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{-۳e_۱ + ۵e_۲ = ۵}$

$$\begin{cases} -e_۱ + e_۲ = ۱۷ \\ -۳e_۱ + ۵e_۲ = ۵ \end{cases} \Rightarrow e_۱ = -۴۰ , e_۲ = -۲۳ , e_۳ = -۳۵$$

$\Rightarrow v_x = e_۲ - e_۳ = -۲۳ + ۳۵ = ۱۲v$

روش مش

۱- مدار را در صورت امکان و نیاز ساده کنید

۲- مش های داخلی مدار داده شده را مشخص کنید و برای آن ها جهت حرکت عقربه های ساعت را در نظر بگیرید و جریان آن ها را با I_1، I_2، ... مشخص کنید.

۳- روابط KVL را برای مش ها می نویسیم به طوری که جریان مش ها در معادلات وارد شود. در صورت وجود مجهولات اضافی آن ها را بر حسب جریان مش ها بنویسید.

توجه: شاخه های مش
- داخلی ← بین دو مش مشترک است ← جریان آن تفاضل جریان دو مش ها می شود (هم جهت علامت مثبت)
- خارجی ← جریان همان جریان مش است
  - (+) ← هم جهت
  - (−) ← مخالف جهت

۴- به یک دستگاه m معادله، m مجهول می رسیم و آن را حل می کنیم و جریان مش ها بدست می آید

$$\underbrace{m}_{\text{تعداد مش های داخلی}} = \underbrace{b}_{\text{تعداد شاخه ها}} - \underbrace{n_t}_{\text{تعداد کل گره ها}} + 1$$

۵- سایر مجهولات را بر حسب جریان مش ها می نویسیم.

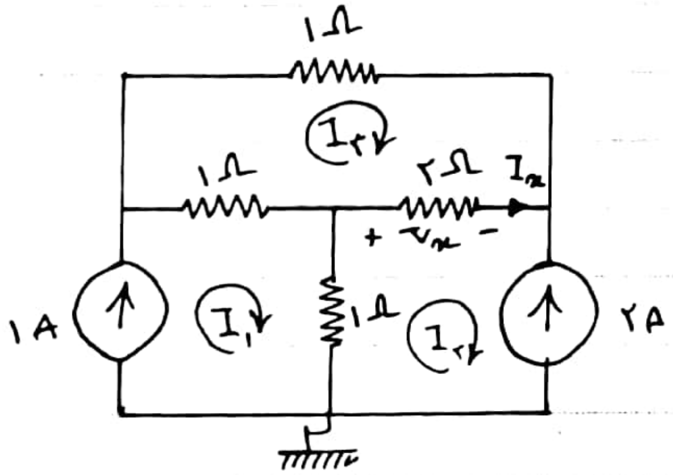
نکته

انتخاب روش حل بستگی به توپولوژی مدار و المان ها دارد. معمولاً اگر تعداد مش ها نسبت به تعداد گره ها $(n_t - 1)$ کمتر باشد، روش مش ارجح است

تعداد مش ها یعنی آن هایی که مجبوریم برایشان KVL بنویسیم.

تعداد گره ها یعنی آن هایی که مجبوریم برایشان KCL بنویسیم.

مثال: به روش مش V_x را حساب کنید



$I_1 = 1A \quad , \quad I_2 = -2A$

$KVL(3) \Rightarrow (I_3 - I_1)\times 1 + I_3 \times 1 + (I_3 - I_2)\times 2 = 0$

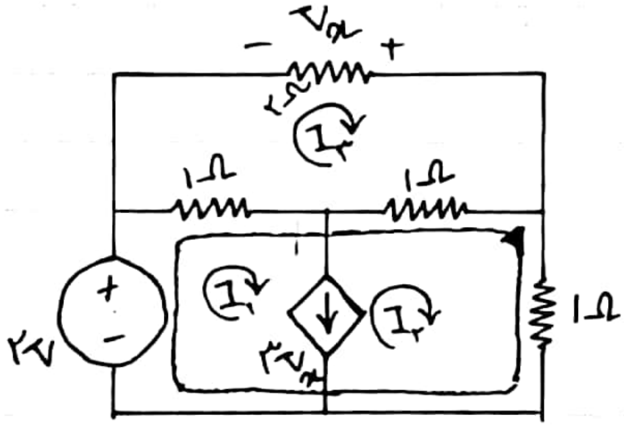
$I_3 - 1 + I_3 + 2I_3 + 4 = 0 \Rightarrow 4I_3 = -3 \Rightarrow I_3 = -\frac{3}{4}$

$I_x = I_2 - I_3 = -2 + \frac{3}{4} = -\frac{5}{4} \Rightarrow V_x = 2 \times I_x = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow V_x = -2.5\,V$

اگر بین دو مش یک منبع جریان (مستقل و وابسته) قرار داشته باشد، به جای نوشتن KVL برای هر یک از دو مش به صورت جداگانه، رابطه‌ی KVL را برای حلقه در برگیرنده‌ی دو مش می‌نویسیم. یک معادله هم از برابر قرار دادن جریان منبع با تفاضل جریان مش‌ها (در جهت درست) خواهیم داشت.

مثال: V_x را به روش مش حساب کنید.



$$KVL\ ①②\ \Rightarrow -2 + (1\times(I_1 - I_3)) + (1\times(I_2 - I_3)) + I_2 = 0$$

حلقه‌ی در برگیرنده‌ی مش ۱ و ۲

$$I_1 + 2I_2 - 2I_3 = 2$$

جریان منبع جریان $\Rightarrow 3V_x = I_1 - I_2$

قانون اهم $\Rightarrow V_x = -I_3 \times 2\Omega = -2I_3$

$$-6I_3 = I_1 - I_2 \Rightarrow I_1 - I_2 + 6I_3 = 0$$

$$KVL\ (e_3):\ [1\times(I_3-I_1)] + 2I_3 + [1\times(I_3-I_2)] = 0$$

$$-I_1 - I_2 + 4I_3 = 0$$

$$\begin{cases} I_1 + 2I_2 - 2I_3 = 2 \\ I_1 - I_2 + 6I_3 = 0 \\ -I_1 - I_2 + 4I_3 = 0 \end{cases}$$

محاسبه‌ی I_3 به روش کرامر:

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2\times(-1-1)}{1\times(-4+6) - 2\times(4+6) - 2\times(-1-1)}$$

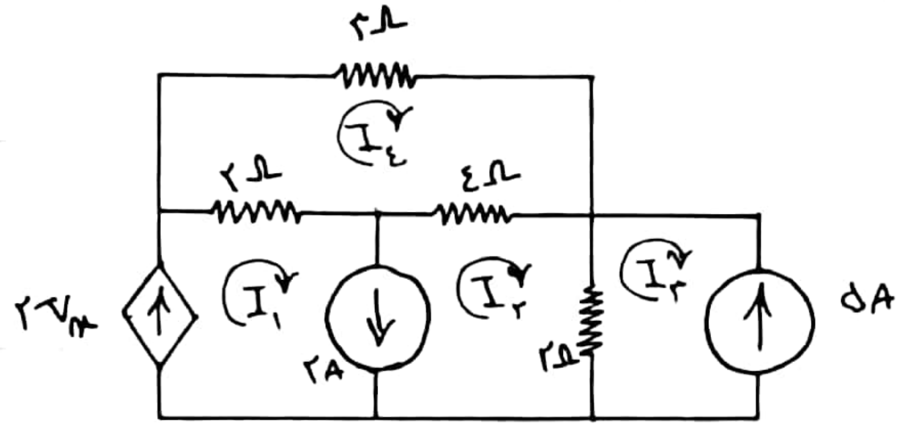
$$= \frac{-4}{2-20+4} = \frac{2}{7}$$

$$V_x = -2I_3 = -\frac{4}{7}$$

به عنوان تمرین: توان منبع جریان وابسته را حساب کنید

راهنمایی: باید I_1 را حساب کرد و KCL را برای مش ① نوشت یا I_3 را محاسبه کرد و KVL را در مش ② نوشت و در نهایت ولتاژ منبع جریان حساب شود.

مثال: V_x را محاسبه کنید



$$I_1 = 2V_x = 2\times(-3I_4) = -6I_4$$

$$I_1 - I_2 = 2A \quad , \quad 2V_x - I_2 = 2$$

$$I_2 = 2V_x - 2 \quad , \quad I_3 = -5$$

$$KVL\ (4) \Rightarrow 2\times(I_4 - I_1) + 3\times(I_4) + 4\times(I_4 - I_2) = 0$$

$$9I_4 - 2I_1 - 4I_2 = 0$$

$$9I_4 - 2\times(-6I_4) - 4\times(2V_x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 21I_4 - 8V_x = -8 \Rightarrow 21\times\left(\frac{-V_x}{3}\right) - 8V_x = -8$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{8}{15}\,v$$

توان منبع جریان وابسته :

$$V_x = \frac{۸}{۱۵} \to I_۱ = ۲V_x = \frac{۱۶}{۱۵}$$

$$I_۲ = ۲V_x - ۲ = \frac{۱۶}{۱۵} - ۲ = -\frac{۱۴}{۱۵} \quad , \quad I_۴ = -\frac{۸}{۴۵}$$

$$KVL ①,④ \Rightarrow V_y + ۲(I_۱ - I_۴) + ۴(I_۲ - I_۴) + ۲(I_۲ - I_۳) = ۰$$

$$V_y + ۲I_۱ - ۶I_۴ + ۶I_۲ - ۲I_۳ = ۰$$

$$V_y + ۲\times\frac{۱۶}{۱۵} - ۶\times\frac{۸}{۴۵} + ۶\times\frac{-۱۴}{۱۵} - ۲\times(-۵) = ۰$$

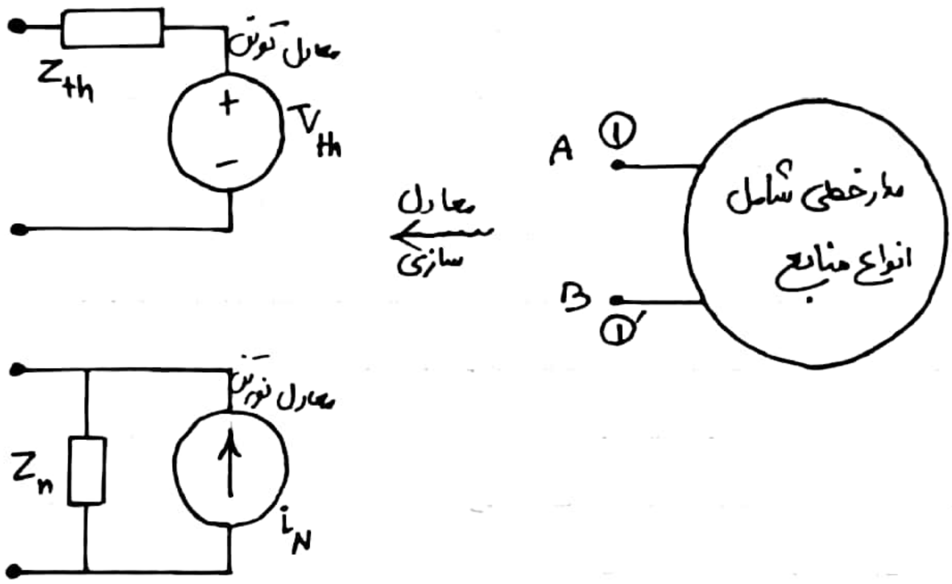
$$V_y = -(۲/۱) + (۱/۰۶) + (۵/۶) - (۱۰) = -۵٫۴۴$$

$$V_y = -۵٫۴۴$$

$$P = (۲V_x) \times V_y = -۵٫۸ < ۰$$ یعنی توان می‌دهد

معادل تونن و نورتن

هر مدار خطی را از دیدِ دو سر (به عنوان یک تک قطبی) می‌توان به صورت معادل تونن (منبع ولتاژ مستقل سری با امپدانس [مقاومت]) یا نورتن (منبع جریان مستقل موازی با مقاومت) مدل کرد



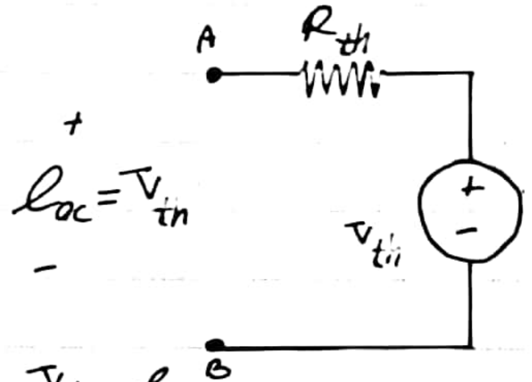
روش‌های محاسبه‌ی معادل تونن (نورتن)

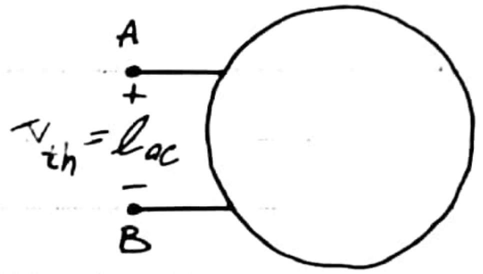
۱ـ روش مدار باز ـ اتصال کوتاه

۲ـ روش اعمال تحریک و محاسبه‌ی همزمان مقاومت و منبع $\rightarrow$ برای همه‌ی مدارها

۳ـ محاسبه‌ی مقاومت به روش اعمال تحریک و محاسبه منبع با مدار باز کردن یا اتصال کوتاه کردن

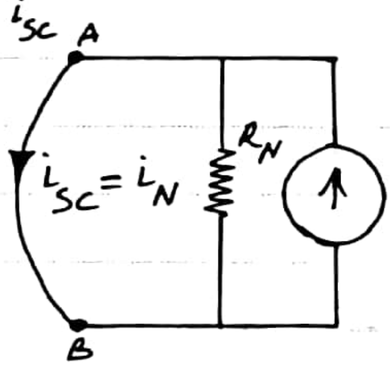
روش ۱ : e_{oc} - i_{sc}

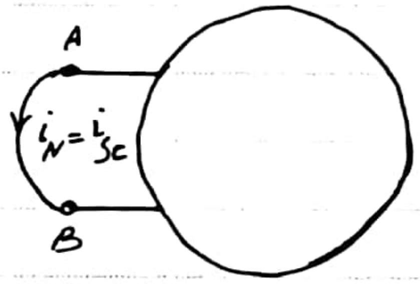




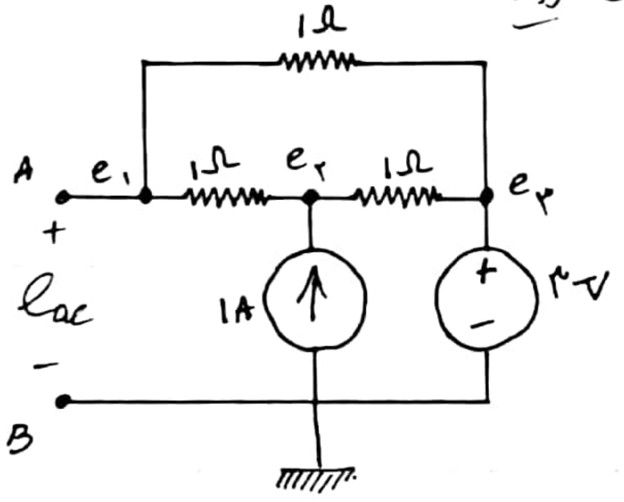
$$R_{th} = R_N = \frac{V_{th}}{i_N} = \frac{e_{oc}}{i_{sc}}$$

مدار دارای حداقل یک منبع مستقل





مثال: به روش e_{oc} و i_{sc} معادل تونن را بدست آورید



محاسبه‌ی e_{oc} به روش گره:

$$KCL(e_1) \Rightarrow \frac{e_1-e_2}{1}+\frac{e_1-e_3}{1}=0$$

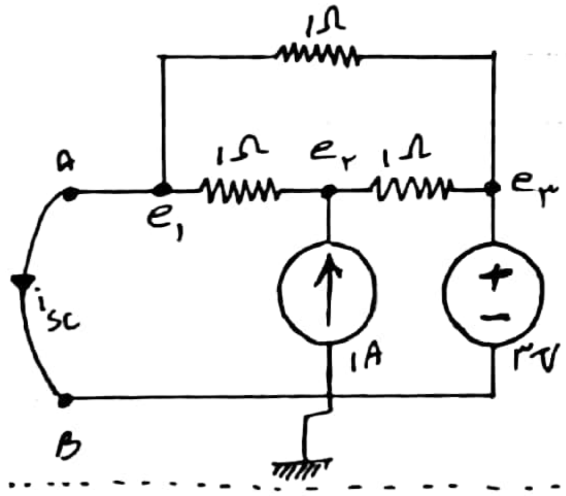
$$\text{(I)}\quad 2e_1-e_2=3$$

$$KCL(e_2) \Rightarrow -1+\frac{e_2-e_1}{1}+\frac{e_2-e_3}{1}=0$$

$$\text{(II)}\quad 2e_2-e_1=4$$

$$\text{(I)},\text{(II)} \Rightarrow 3e_1=6+4=10 \rightarrow e_1=\frac{10}{3}V=e_{oc}=V_{th}$$

محاسبه‌ی i_{sc} به روش گره:



$$e_1=0,\ e_3=3V,\ e_2=?$$

$$KVL(2) \Rightarrow -1+\frac{e_2-e_1}{1}+\frac{e_2-e_3}{1}=0$$

$$-1+2e_2-e_1-e_3=0$$

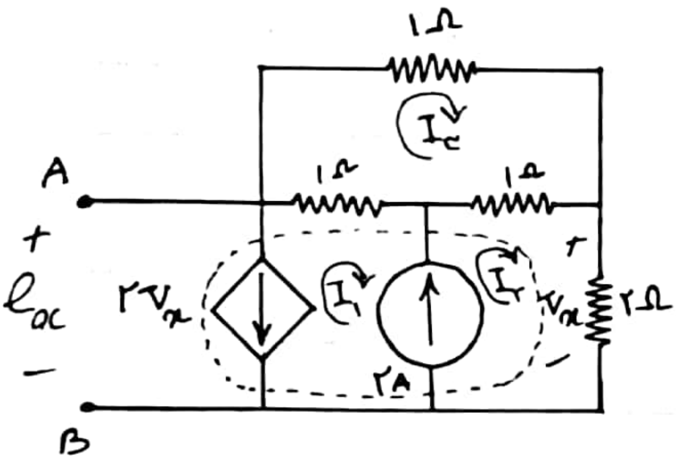
$$KCL(e_1),(A) \Rightarrow i_{sc}+\frac{e_1-e_2}{1}+\frac{e_1-e_3}{1}=0$$

$$-1+2e_2-3=0,\quad e_2=2V_{OH}$$

$$i_{sc}+2e_1-e_2-e_3=0 \Rightarrow i_{sc}=-2e_1+e_2+e_3 \rightarrow i_{sc}=5A=i_N$$

$$R_{th}=R_N=\frac{e_{oc}}{i_{sc}}=\frac{2}{3}\Omega$$

مثال: معادل تونن را بدست آورید.



محاسبه‌ی e_{oc} به روش مش:

$$I_1 = -2V_x$$

$$3A = I_2 - I_1$$

$$I_2 = I_1 + 3 = -2V_x + 3 \quad , \quad I_1 = -2V_x = -2 \times 2 I_2 = -4 I_2$$

$$\begin{cases} I_2 - I_1 = 3 \\ I_1 = -4 I_2 \end{cases} \Rightarrow I_2 = \frac{3}{5} A \quad , \quad I_1 = -\frac{12}{5} A$$

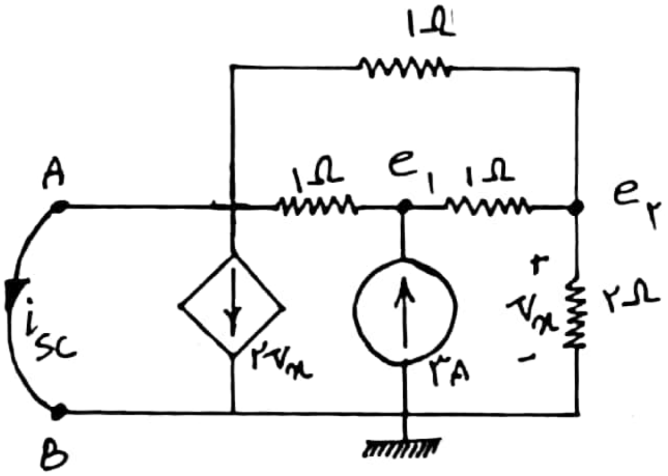
$$KVL(3) \rightarrow 1 \times I_3 + (I_3 - I_2) + I_3 - I_1 = 0$$

$$3I_3 - I_2 - I_1 = 0 \quad , \quad I_3 = -\frac{3}{5} A$$

$$KCL(L) \rightarrow -e_{oc} + 1 \times (I_1 - I_3) + 1 \times (I_2 - I_3) + 2 I_2 = 0$$

$$e_{oc} = I_1 + 3I_2 - 2I_3 = -\frac{12}{5} + \frac{9}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3}{5} V$$

محاسبه‌ی i_{sc} به روش گره



$$KCL(1) \Rightarrow -3 + \frac{e_1 - 0}{1} + \frac{e_1 - e_2}{1} = 0$$

$$KCL(2) \Rightarrow \frac{e_2}{2} + \frac{e_2 - e_1}{1} + \frac{e_2 - 0}{1} = 0$$

$$5e_2 - 2e_1 = 0$$

$$\begin{cases} 2e_1 - e_2 = 3 \\ -2e_1 + 5e_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow e_2 = \frac{3}{4} \to e_1 = \frac{15}{8}$$

$$KCL(A) \Rightarrow i_{sc} + 2v_x + \frac{0 - e_1}{1} + \frac{0 - e_2}{1} = 0$$

$$i_{sc} + 2e_2 - e_1 - e_2 = 0$$

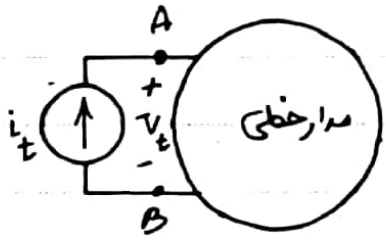
$$i_{sc} = e_1 - e_2 = \frac{15}{8} - \frac{6}{8} = \frac{9}{8}$$

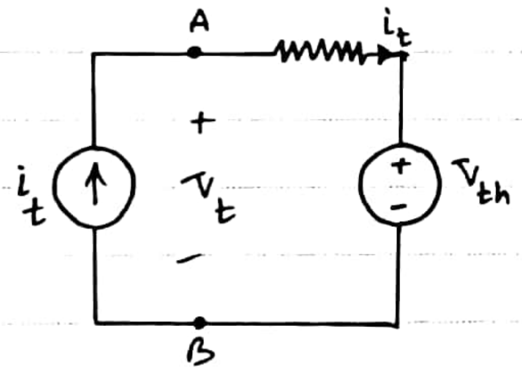
روش ۲ : روش اعمال تحریک

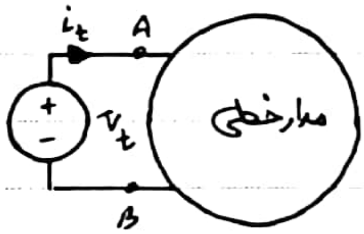
* برای همه مدارها قابل استفاده است.

* تحریک می‌تواند منبع جریان مستقل یا منبع ولتاژ مستقل باشد

* در مدار خطی با تحلیل مدار به یک رابطه‌ی خطی به صورت $v_t = k_1 i_t + k_2$ می‌رسیم که داریم:







$k_1 = R_{th}$

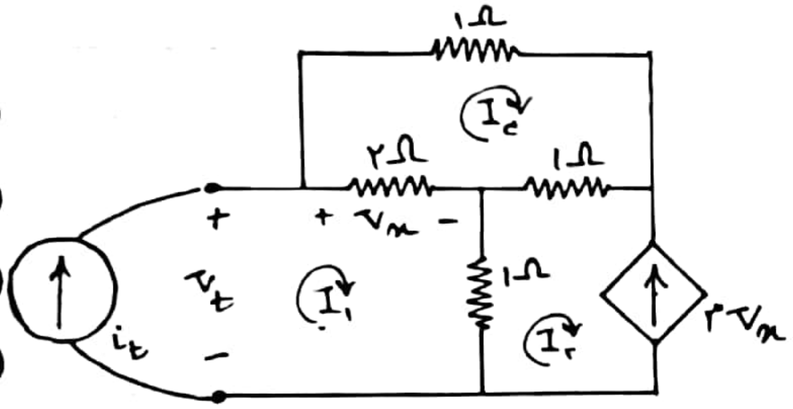
$k_2 = v_{th}$

$$v_t = k_1 i_t + k_2$$

$$v_t = R_{th}\, i_t + v_{th}$$

* در مدارهایی که منبع مستقل ندارند و فقط منبع وابسته دارند، تنها روش محاسبه‌ی مقاومت معادل، همین روش اعمال تحریک است. در این مدارها $v_{th} = 0$ ، $i_N = 0$

مثال : معادل تونن مدار زیر را بدست آورید



$$I_1 = i_t \quad , I_2 = -3v_x$$

$$KVL(3) \Rightarrow 2(I_3 - I_1) + I_3 + (I_3 - I_2) = 0$$

$$4I_3 - 2I_1 - I_2 = 0 \rightarrow 4I_3 - 2i_t + 3v_x = 0$$

$$\Rightarrow v_x = 2 \times (I_1 - I_3) = 2i_t - 2I_3$$

$$4I_3 - 2i_t + 3(2i_t - 2I_3) = 0$$

$$-2I_3 + 4i_t = 0 \rightarrow I_3 = 2i_t$$

$$I_2 = -3v_x = -3 \times (2i_t - 2I_3) = -3 \times (2i_t - 2I_3)$$

$$= -3 \times (2i_t - 4i_t) = 6i_t$$

$$\Rightarrow I_2 = 6i_t$$

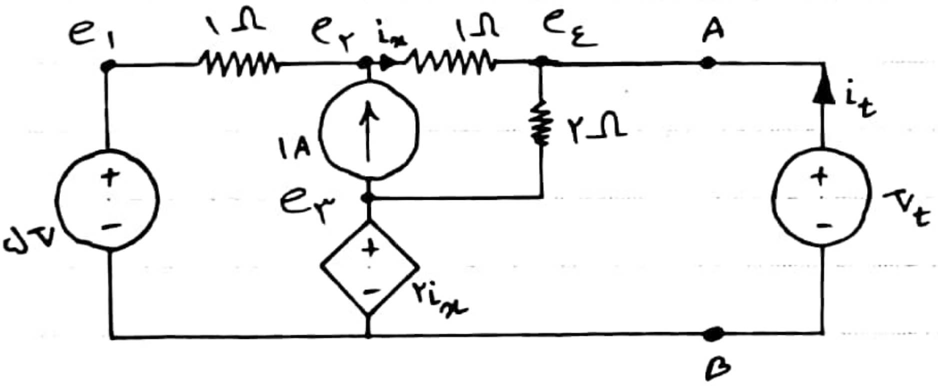
$$KVL① \Rightarrow -V_t + 2(I_1 - I_3) + 1\times(I_1 - I_2) = 0$$

$$V_t = 3I_1 - 2I_3 - I_2 \Rightarrow V_t = 3i_t - 2\times(2i_t) - 6i_t$$

$$\Rightarrow V_t = -7i_t \Rightarrow R_{th} = \frac{V_t}{i_t} = -7\,\Omega$$

در مدارهای با منبع وابسته، مقاومت معادل می‌تواند منفی باشد.

مثال: همزمان مقاومت معادل را از دید A و B بدست آورید.



$$e_1 = 5V,\quad e_3 = 2i_x = 2\times\left(\frac{e_2 - e_4}{1}\right) = 2e_2 - 2V_t,\quad e_4 = V_t$$

$$KCL② \Rightarrow -1 + \frac{e_2 - e_1}{1} + \frac{e_2 - e_4}{1} = 0$$

$$\Rightarrow 2e_2 - e_1 - e_4 = 1 \Rightarrow 2e_2 - 5 - V_t = 1 \Rightarrow 2e_2 = 6 + V_t$$

$$\Rightarrow e_2 = 3 + \frac{V_t}{2}$$

برای بدست آوردن ارتباط v_t و i_t :

$$KCL(4) \Rightarrow -i_t + \frac{e_4 - e_2}{1} + \frac{e_4 - e_3}{2} = 0$$

$$-2i_t + 3e_4 - 2e_2 - e_3 = 0 \Rightarrow -2i_t + 3v_t - 6 - v_t - 2e_2 + 2v_t = 0$$

$$\Rightarrow -2i_t + 4v_t - 6 - 2 \times \underbrace{\left(3 + \frac{v_t}{2}\right)}_{e_2} = 0$$

$$\Rightarrow -2i_t + 4v_t - 6 - 6 - v_t = 0 \Rightarrow 3v_t - 2i_t - 12 = 0$$

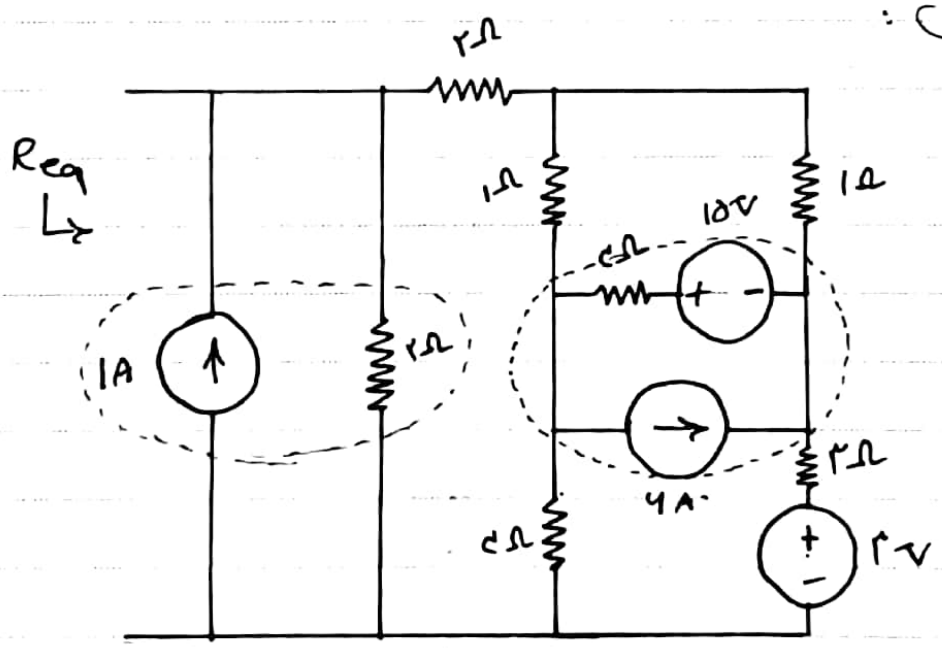
$$\Rightarrow v_t = \underbrace{\frac{2}{3}}_{R_{th}} i_t + \underbrace{4}_{v_{th}}$$

روش ۳: محاسبه‌ی مقاومت با اعمال تحریک و محاسبه‌ی منبع با e_{oc} و i_{sc}

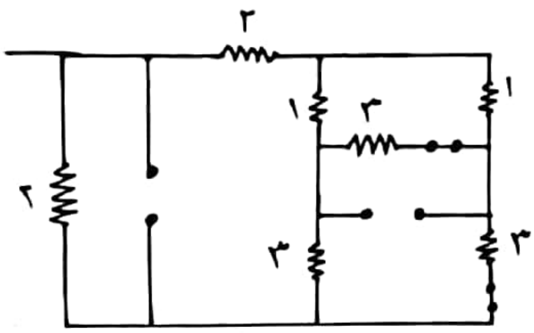
با توجه به اینکه مقاومت معادل تابع مقدار منابع ولتاژ و جریان مستقل در مدار نیست، می‌توان برای محاسبه‌ی مقاومت منابع مستقل مدار را حذف کرد و با تشخیص سری، موازی، ستاره-مثلث یا روش اعمال تحریک، مقاومت معادل را بدست آورد.

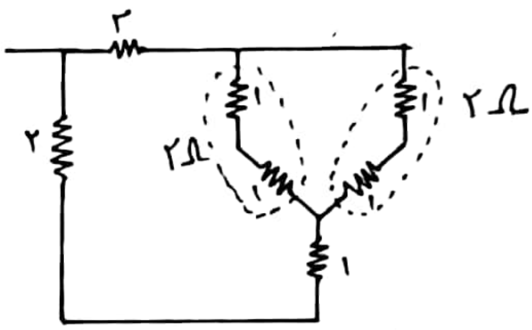
برای محاسبه‌ی ولتاژ تونن می‌توان منابع را به مدار بازگرداند و e_{oc} را محاسبه کرد یا در این حالت با اتصال کوتاه کردن تک قطبی i_{sc} را محاسبه کرده و از $e_{oc} = R_{th} i_{sc}$ استفاده می‌کنیم.

مثال:



به اینصورت $\Longrightarrow$ داریم



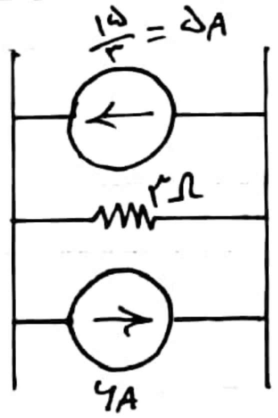


$$۲\Omega \,\|\, ۲\Omega = ۱$$

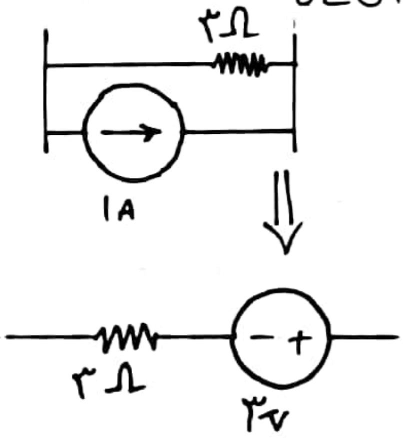
$$R_{eq} = ۲\Omega \,\|\, (۱+۲+۱) = \frac{۴}{۳}\,\Omega$$

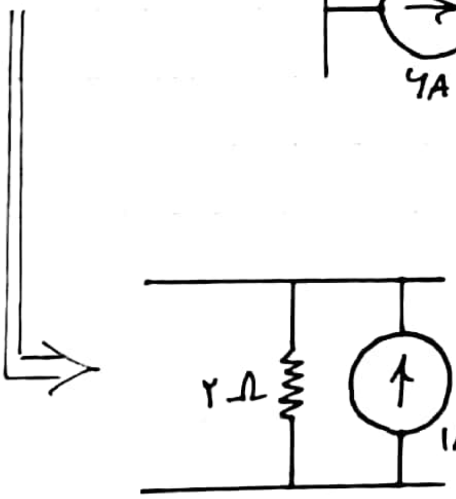
محاسبه e_{oc}

قسمت های سبز مشخص شده $\Longrightarrow$

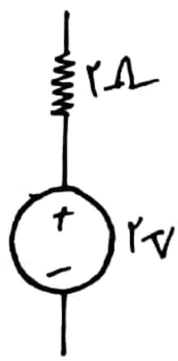


$\Longrightarrow$



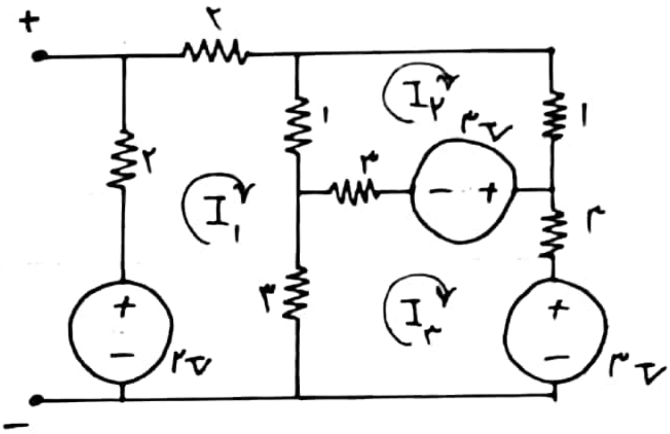


$\Longrightarrow$



Scanned by CamScanner

شکل نهایی مدار با تغییرات گفته شده $\Rightarrow$

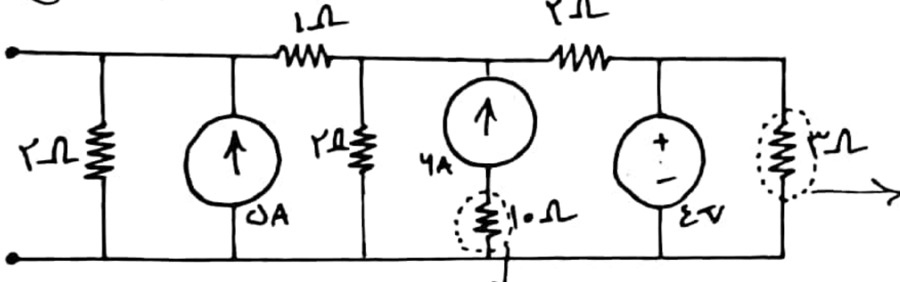


$$\left.\begin{array}{l} KVL\,① \\ KVL\,② \\ KVL\,③ \end{array}\right\} \rightarrow I_1, I_2, I_3$$

$$e_{oc} = -I_1 \times ۲\Omega + ۲V = V_{th}$$

توجه: گاهی در مدارهای فقط شامل منابع مستقل از تبدیلات متوالی منابع ولتاژ و جریان به یکدیگر به راحتی معادل تونن بدست می آید

مثال: معادل تونن = ?

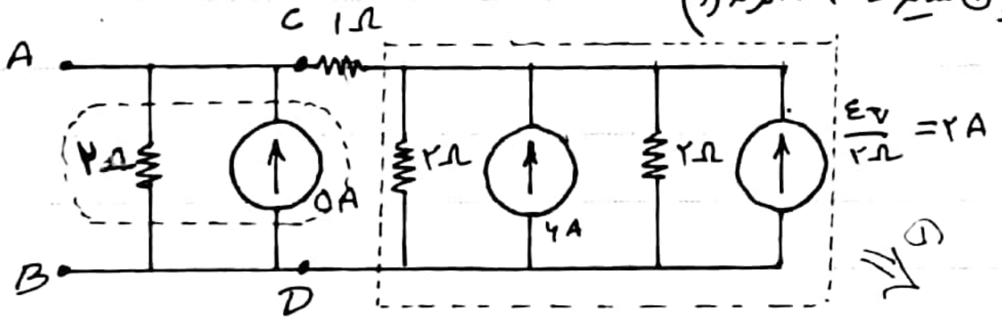


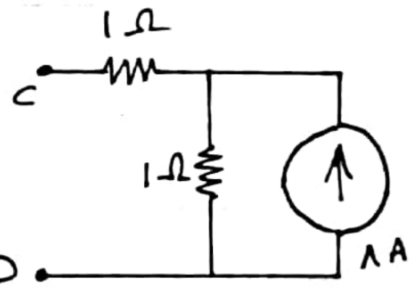
مقاومت موازی با منبع ولتاژ ← به صورت مدار باز

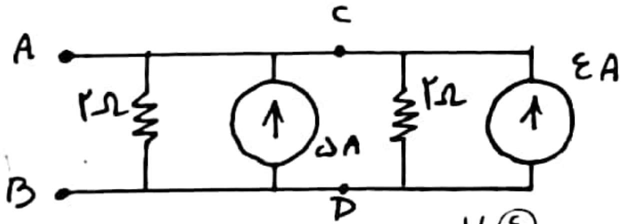
مقاومت سری با منبع جریان ← به صورت اتصال کوتاه

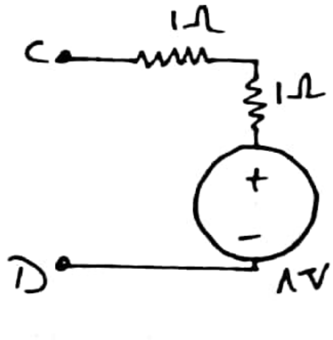
در این مدار قابل حذف است

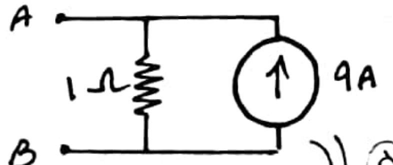
(بر ولتاژ و جریان سایر شاخص ها اثر ندارد)

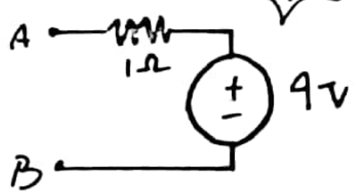










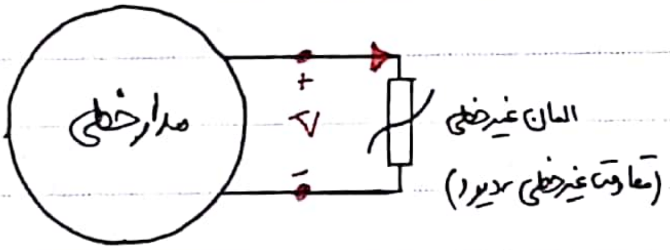


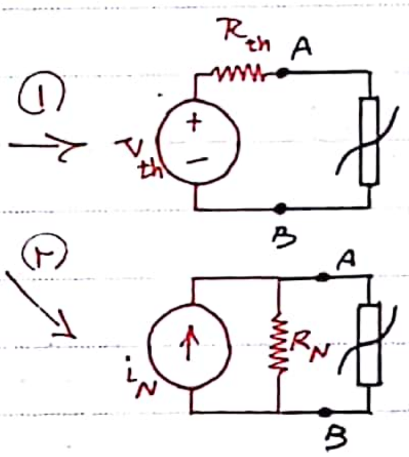
معادل تونن

یک کاربرد از معادل تونن و نورتن

اگر مدار شامل یک المان غیرخطی باشد و سایر المان‌های مدار خطی باشند، می‌توان از دید دو سر المان غیرخطی معادل تونن (نورتن) مدار را بدست آورد و جایگزین کرد و به خط بار برای المان غیرخطی رسید.

با استفاده از دو معادله $\left\{ \begin{array}{l} \text{معادله مشخصه المان غیرخطی} \\ \text{خط بار} \end{array} \right.$ که می‌توان جریان و ولتاژ المان غیرخطی را محاسبه کرد.





کنترل شونده با جریان $\Rightarrow v = f(i)$

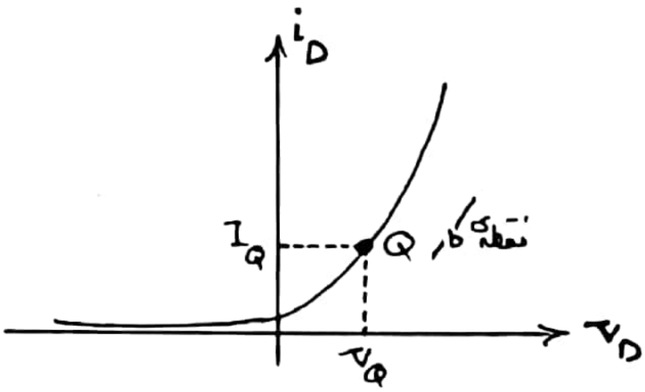
کنترل شونده با ولتاژ $\Rightarrow i = g(v)$

$$i_D = I_s\left(e^{\frac{v_D}{\eta v_t}} - 1\right) = g(v_D)$$

① $\Rightarrow$ KVL $\Rightarrow -v_{th} + R_{th}\, i + v = 0$ $\quad \boxed{v = v_{th} - R_{th}\, i} = f(i)$

② $\Rightarrow$ KCL $\Rightarrow -i_N + \frac{v}{R_N} + i = 0$ $\quad$ خط بار $\boxed{i = i_N - \frac{v}{R_N}} = g(v)$

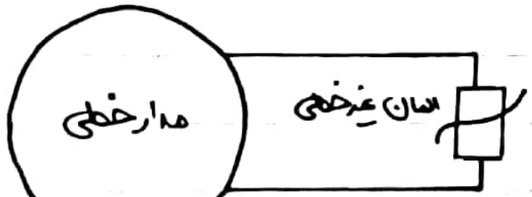
Subject ۷۵
Date ۹۷/۱/۱۹ یکشنبه



کاربرد تونن و نورتن

حل مدارهای با یک المان غیرخطی

منظور حل مداری است که همه المان های آن به جز یک المان خطی باشد.

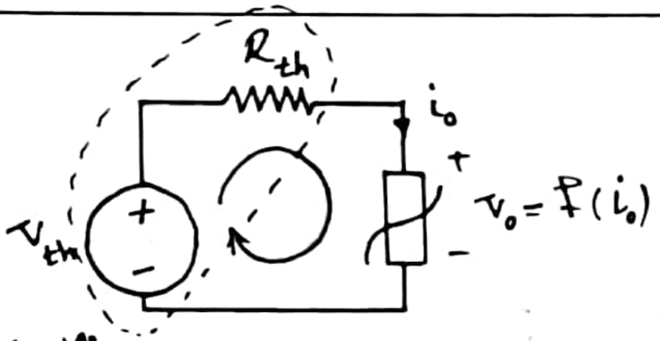


با استفاده از معادل تونن یا نورتن و استفاده از مشخصه المان غیرخطی این مدارها قابل حل هستند

خط بار را برای المان غیرخطی بدست می دهد

رابطه‌ی ولتاژ جریان برای المان غیرخطی

← قرار گرفتن هر المان در مدار یک محدودیت برای ارتباط ولتاژ-جریان آن ایجاد می‌کند. این ارتباط را خط بار می گویند ←



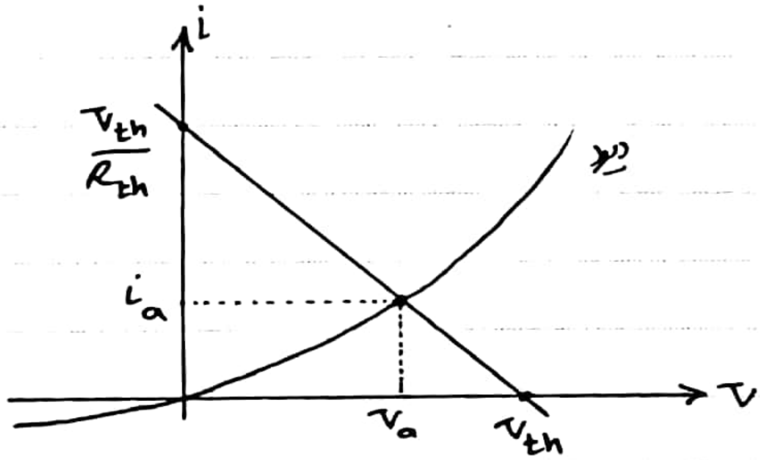
معادل تونن مدار خطی

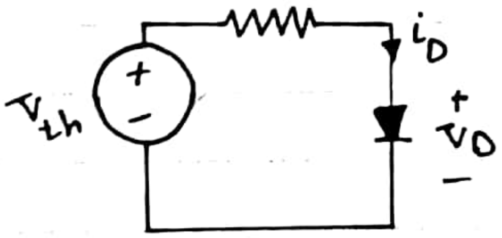
$$-V_{th} + R_{th}\, i_o + V_o = 0$$

خط بار $\quad V_o = -R_{th}\, i_o + V_{th}$

معادله مشخصه المان غیرخطی $\quad V_o = f(i_o)$

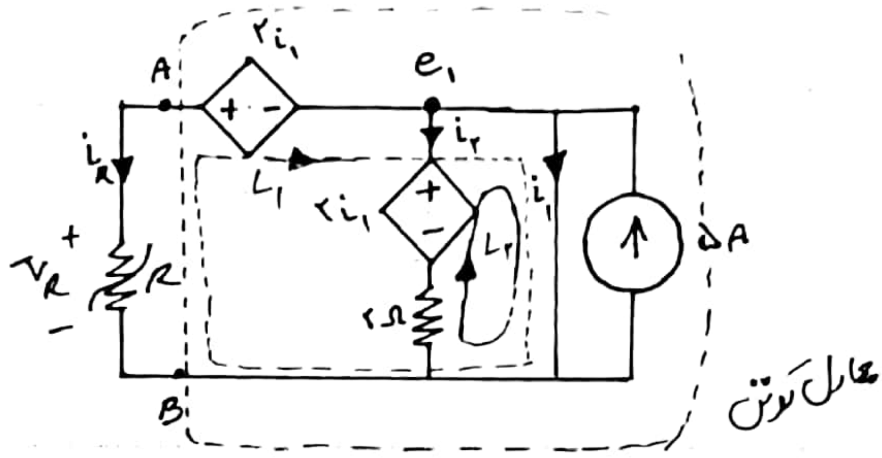
$\xrightarrow{\text{حل}} \left.\begin{matrix} V_o \\ i_o \end{matrix}\right\} \rightarrow Q$ نقطه کار





$$\boxed{v_D = -R_{th}\, i_D + V_{th}}$$

مثال: اگر $i_R = v_R^2$ باشد، $v_R , i_R = ?$



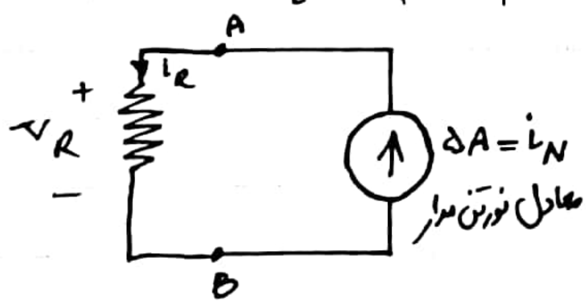
روش‌های محاسبه معادل تونن:
۱- محاسبه e_{oc} ، i_{sc}
۲- روش همزمان ← اعمال تحریک
۳- محاسبه‌ی مقاومت با خنثی کردن منابع مستقل را اعمال تحریک و محاسبه‌ی ولتاژ تونن از مدار باز $e_{oc} = v_{th}$

محاسبه‌ی معادل تونن به روش همزمان:

$$KVL(L_1) \Rightarrow -v_t + 2i_1 + 0 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{v_t}{2}$$

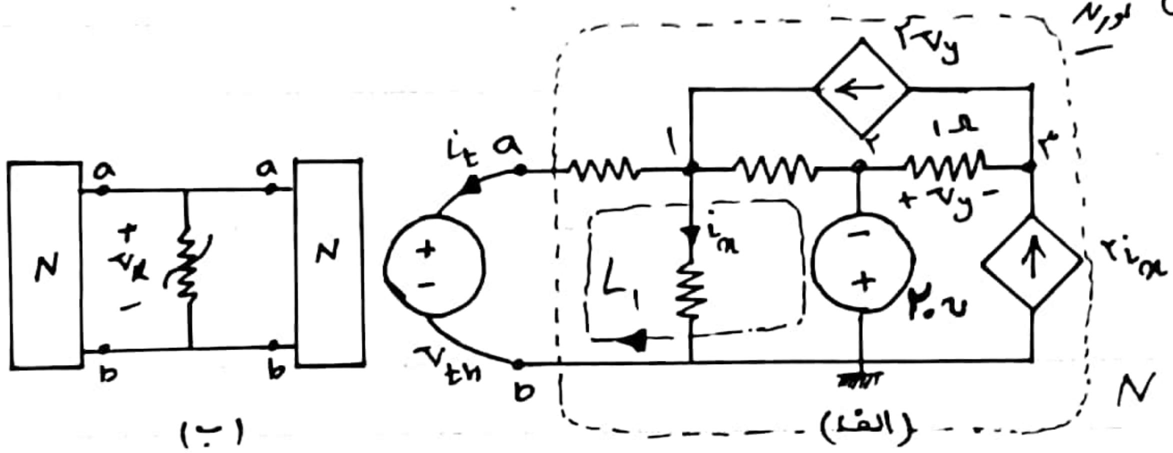
$$KVL(L_2) \Rightarrow -2i_2 - 2i_1 + 0 = 0 \Rightarrow i_2 = -i_1$$

$$KCL(e_1) \Rightarrow -i_t + i_2 + i_1 - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{i_t = -5A}$$

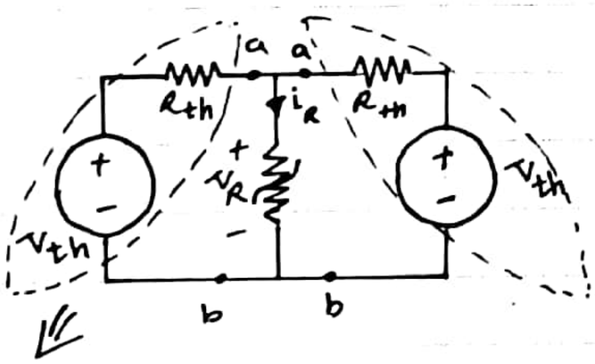


$$i_R = 5A \Rightarrow v_R = \pm\sqrt{i_R} = \pm\sqrt{5}$$

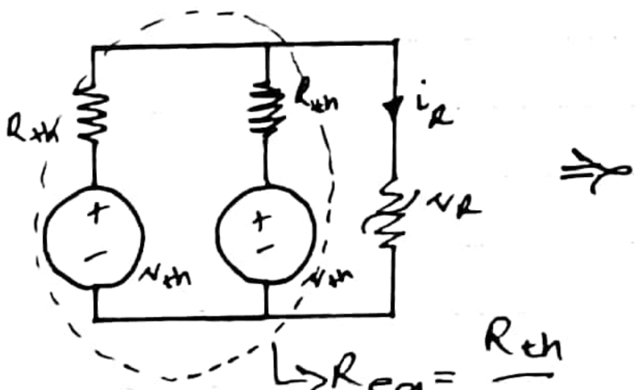
شبکه‌ی N با مدار شکل (الف) داده شده است. اگر مطابق شکل (ب) دو شبکه مشابه را با یک المان غیرخطی با رابطه‌ی $v_R = \frac{5}{2} i_R + i_R^2$ متصل کنیم، جریان و ولتاژ المان غیرخطی را بدست آورید.



اگر معادل تونن را برای شبکه N بدست آوریم و در (ب) جایگزین کنیم مدار (ب) بسیار ساده خواهد شد.

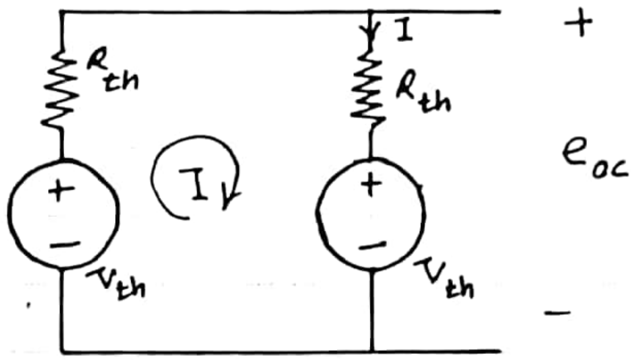


از دید دو سر المان غیرخطی معادل تونن را می‌توان محاسبه کرد



$\to R_{eq} = \frac{R_{th}}{2}$

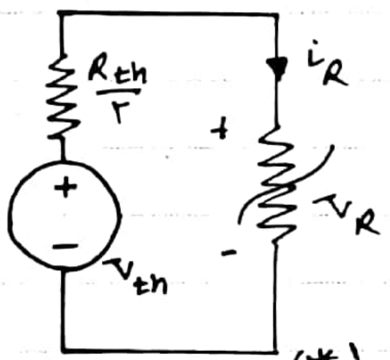
$v_{eq} = e_{oc}$



KVL $(L_1) \rightarrow -v_{th} + I \times R_{th} + I \times R_{th} + v_{th} = 0$

$I = 0 \rightarrow e_{oc} = v_{th}$

پس $\Rightarrow$



(*)

باتوجه به شکل الف: $3e_1 + 4e_2 = v_t - 100$

KCL (3) $\Rightarrow -2i_x + \frac{e_3 - e_2}{1} + 2v_y \rightarrow i_x = \frac{e_1}{2}$

$v_y = e_2 - e_3 = -20 - e_3$

$-e_1 + e_3 + 20 - 40 - 2e_3 = 0 \rightarrow -e_1 - e_3 = 20$

$$\times۲ \begin{cases} ۲e_1 + ۴e_۲ = v_t - ۱۰۰ \\ -e_1 - e_۲ = ۲۰ \end{cases}$$

$$e_۲ = v_t - ۶۰ \rightarrow e_1 = -e_۲ - ۲۰ = -v_t + ۲۰$$

$$KVL(L_1) \Rightarrow -v_t + ۲i_t + \underbrace{۲i_x}_{e_1} = ۰$$

$$-v_t + ۲i_t - v_t + ۲۰ = ۰$$

$$-۲v_t + ۲i_t + ۲۰ = ۰ \Rightarrow v_t = i_t + ۱۰ \rightarrow R_{th} = ۱\,\Omega$$

$$v_{th} = ۱۰\,v$$

حل با توجه به مدار (*) داریم : $KVL(L_۲) \Rightarrow -۱۰ + ۱/۲\, i_R + v_R = ۰$

$$-۱۰ + ۱/۲\, i_R + \frac{۵}{۲} i_R + i_R^۲ = ۰$$

$$\rightarrow i_R^۲ + ۳i_R - ۱۰ = ۰$$

$$i_R = ۲ \rightarrow v_R = \frac{۵}{۲} i_R + i_R^۲ = ۹v$$

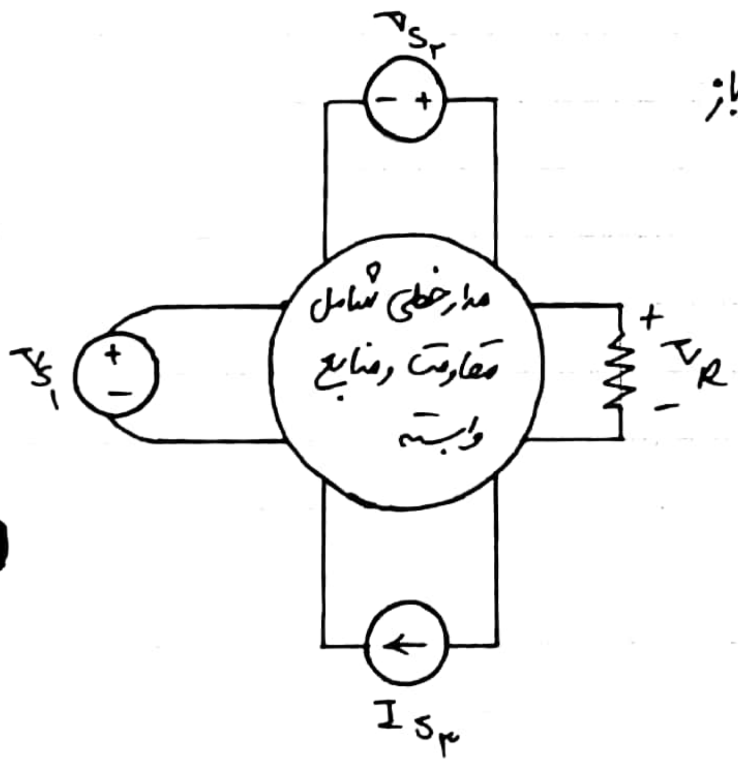
$$i_R = -۵ \rightarrow v_R = \frac{-۲۵}{۲} + ۲۵ = \frac{۲۵}{۲} v$$

قضیه‌ی جمع آثار

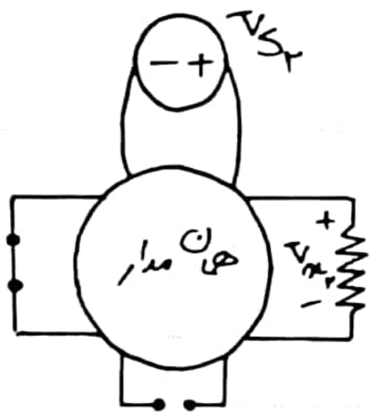
از خواص مدارهای خطی است.

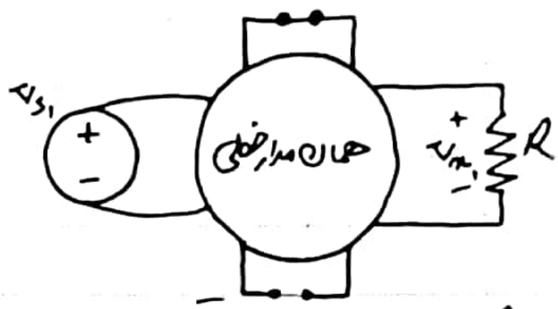
اگر مداری تحت اثر همزمان چند منبع مستقل باشد. پاسخ مدار را می‌توان از جمع کردن پاسخ ناشی از اعمال تک منابع با خنثی کردن دیگران بدست آورد.

خنثی کردن منبع مستقل:
- ولتاژی ← اتصال کوتاه
- جریانی ← مدار باز



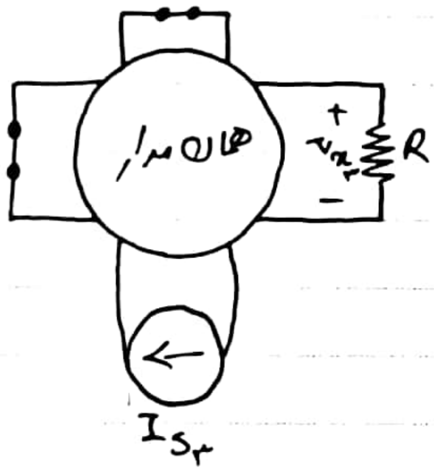
منابع را خنثی می‌کنیم





V_{x_2} : پاسخ ناشی از اعمال فقط V_{S_2} است

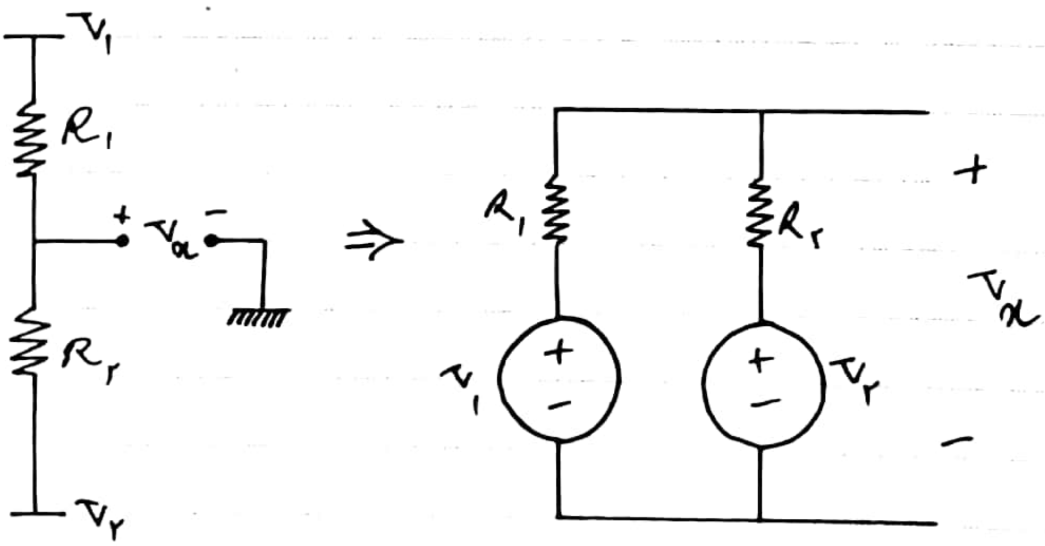
V_{x_1} : ناشی از اعمال فقط V_{S_1} است



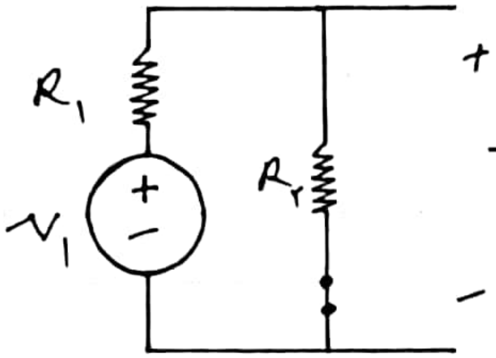
پاسخ کامل: $V_x = V_{x_1} + V_{x_2} + V_{x_3}$

(ناشی از اعمال همزمان منابع)

مثال:

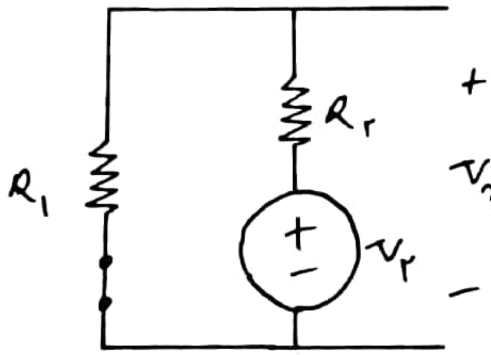


اثر منبع ولتاژ v_1 :



$$v_{x_1} = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_1$$

اثر منبع ولتاژ v_2 :



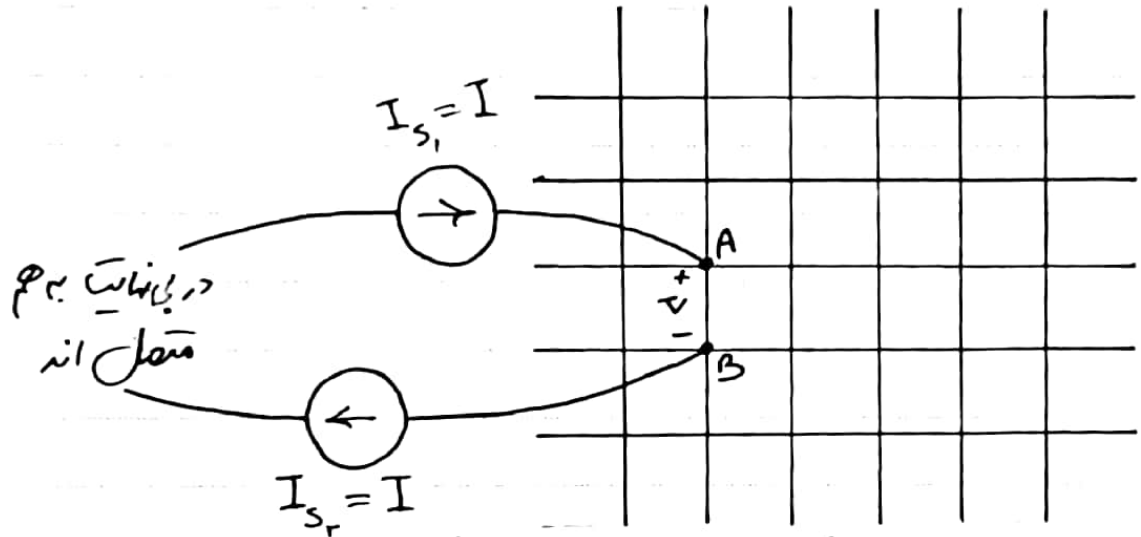
$$v_{x_2} = \frac{R_1}{R_1+R_2} v_2$$

طبق قضیه جمع آثار

$$v_x = v_{x_1} + v_{x_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_1 + \frac{R_1}{R_1+R_2} v_2$$

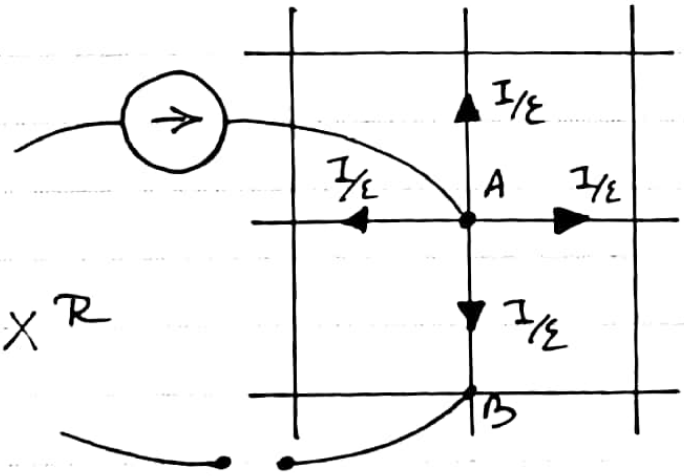
$$= \frac{v_1 R_2 + R_1 v_2}{R_1+R_2}$$

مثال: در شبکه مقاومتی صفحه‌های با ابعاد بسیار بزرگ زیر، مقاومت دیده شده بین A و B را بدست آورید. (همه‌ی مقاومت های بین گره ها، مقدار R دارند)

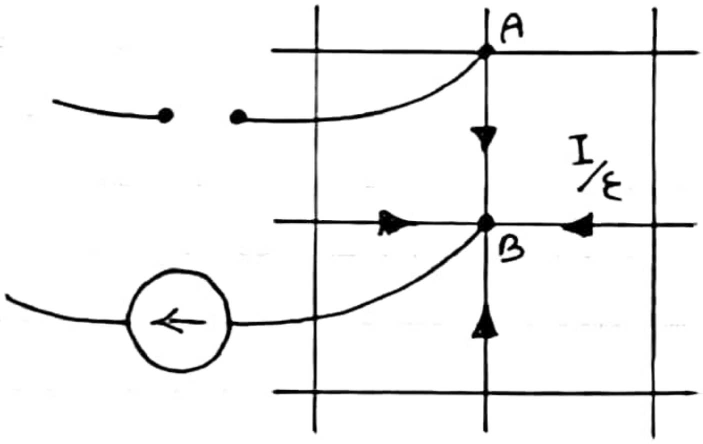


دو تحریک جریانی مطابق شکل به مدار اعمال می‌کنیم و از جمع آثار استفاده می‌کنیم.

اثر I_{s_1}:



ناشی از اعمال I_{s_1}: $V_{AB_1} = \frac{I}{٤} \times R$



اثر $I_{S_۲}$:

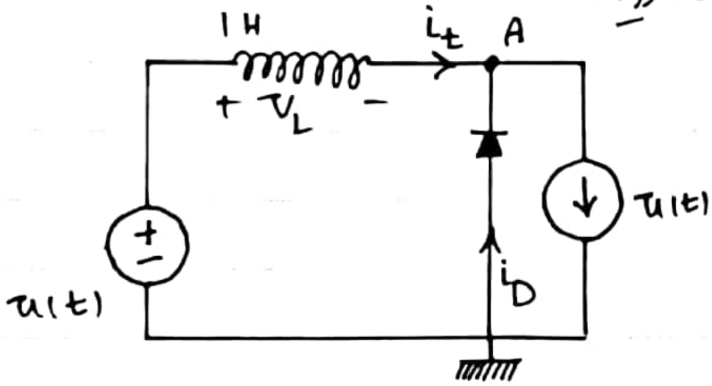
$$V_{AB_۲} = \frac{I}{٤} \times R$$

ناشی از اعمال $I_{S_۲}$

طبق قضیه جمع آثار $V_{AB} = V_{AB_۱} + V_{AB_۲} = I/۲ \, R$

$$\frac{V_{AB}}{I} = \boxed{\frac{R}{۲} = R_{eq}}$$

مثال: در مدار زیر $i(t)$ را بر حسب زمان بدست آورید.



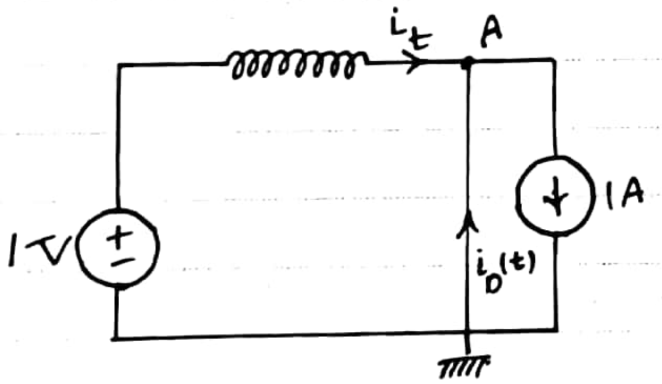
دیود ایده‌آل ← { در هدایت ← اتصال کوتاه ; در عدم هدایت ← مدار باز }

در ابتدا فرض می‌کنیم دیود روشن است و جریان اولیه‌ی سلف، صفر است.

$$KVL(A) \rightarrow -i(t) - i_D(t) + u(t) = 0$$

$$i(t) = i_L(t) \quad , \quad V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad , \quad i(t) = i_L(t)$$

$$i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int_0^t V_L(t)\,dt$$



در $t>0$، با فرض هدایت دیود:

$$KVL(A) \rightarrow -i(t) - i_D(t) + 1A = 0$$

$$-\frac{1}{L}\int_0^t u(t)\,dt - i_D(t) + 1 = 0$$

$$-t - i_D(t) + 1 = 0$$

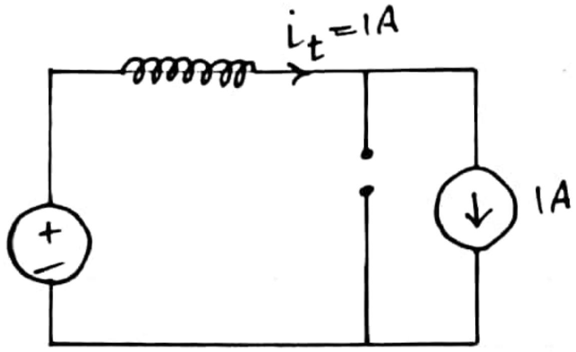
$$\rightarrow i_D(t) = 1 - t$$

پس شرط هدایت دیود عبارتست از:

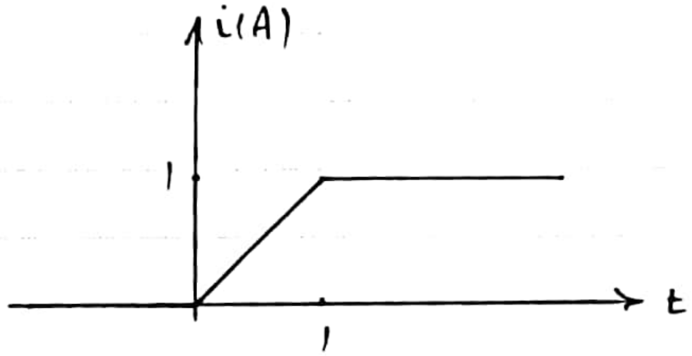
$$i_D > 0 \rightarrow 1 - t > 0 \rightarrow 1 > t$$

یعنی هدایت دیود تا $t<1$ ادامه خواهد داشت

در $t>1$ با فرض خاموش بودن دیود :

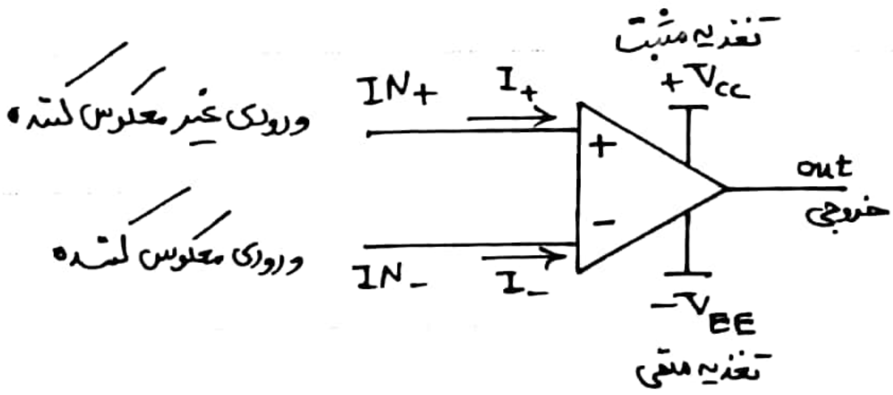


$$t<0 \rightarrow i(t)=I_0=0$$

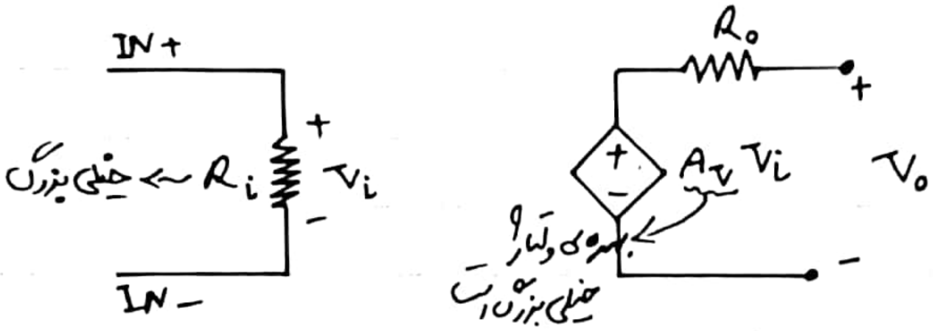


معرفی آپ‌امپ به عنوان یک عنصر مداری

آپ‌امپ (Opamp) یک تقویت‌کننده ولتاژ با بهره خیلی بزرگ و مقاومت ورودی خیلی بزرگ و مقاومت خروجی کوچک است.



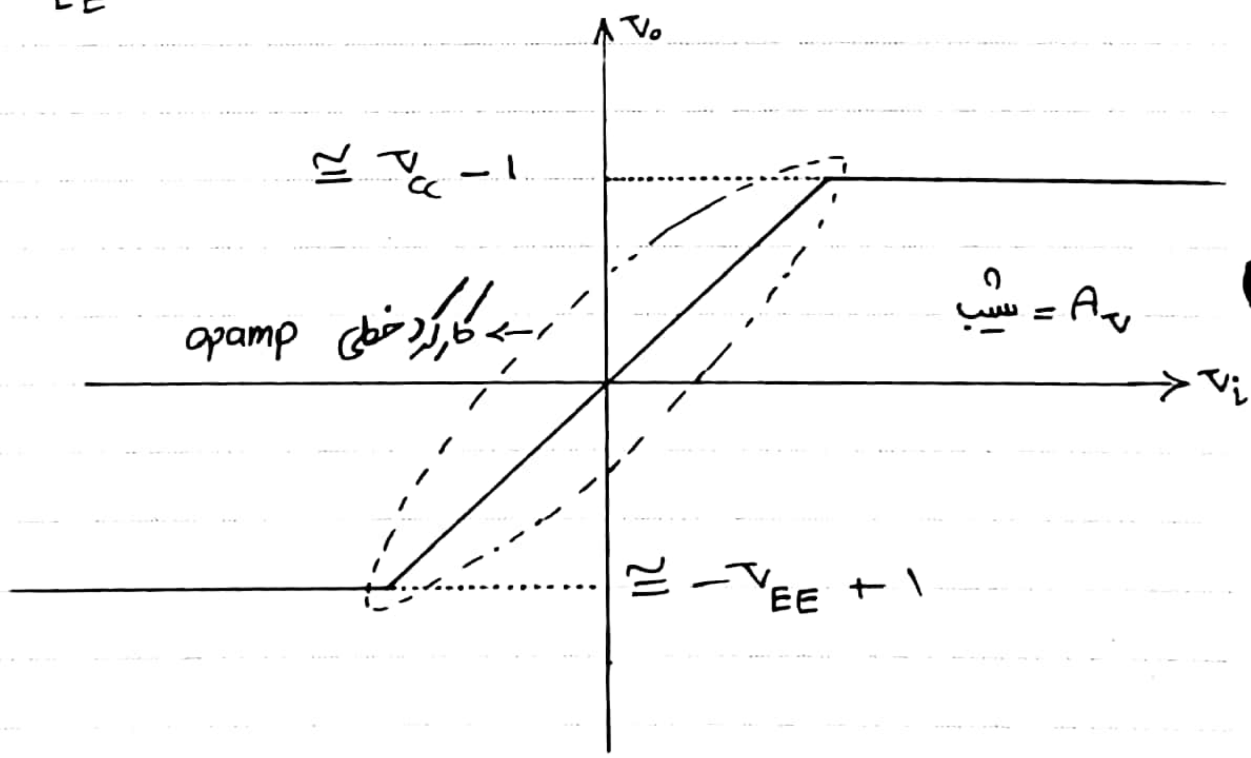
نماد مداری آپ‌امپ



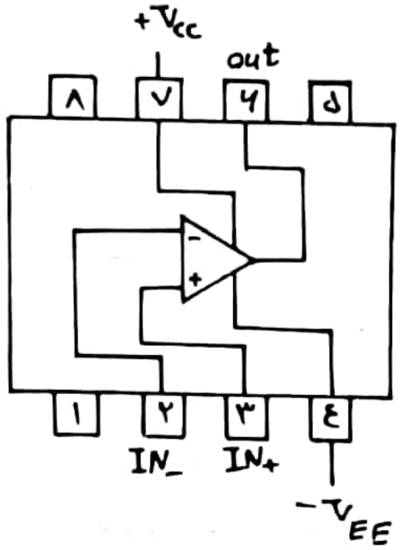
تقریب مدار داخلی آپ امپ

توجه: ولتاژ خروجی opamp حداکثر تا ۱v کمتر از تغذیه ها می تواند باشد و درصورتی که خروجی بخواهد بیشتر شود، اشباع می شود.

$$\left.\begin{array}{l} V_{CC} = 12V \\ -V_{EE} = -12V \end{array}\right\} \rightarrow -11 < V_o < +11V$$



آپ امپ های کلی ۸ پایه هستند



در برخی از opamp ها از پایه‌های اضافی برای آفست گیری استفاده می‌کنند

به علت بهره ولتاژ خیلی بزرگ، در ورودی می‌تواند خروجی را اشباع کند.

مثال: برای opamp با بهره‌ی ۲۰۰۰۰ و تغذیه ۹v ± چه مقداری از ورودی، خروجی را اشباع می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} 9v = V_{cc} \\ -9v = -V_{EE} \end{array}\right\} \rightarrow -8 < V_o < 8$$

در ناحیه‌ی خطی $\rightarrow A_v V_i$

اشباع مثبت $-8v < 20000 \times V_i < 8v$

اشباع منفی $-40\mu v < V_i < 40\mu v$

توجه: در کارکرد در ناحیه خطی به علت بهره بسیار بزرگ برای opamp ورودی، مقدار $V_+ - V_-$ (ولتاژ پایه معکوس کننده) (ولتاژ پایه‌ی غیر معکوس کننده) خیلی کوچک یا نزدیک به صفر است.

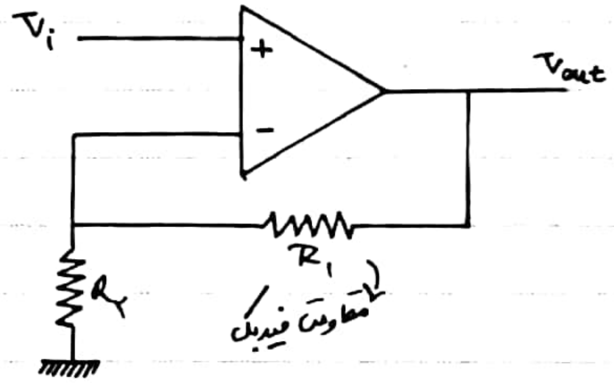
opamp در ناحیه‌ی خطی $\rightarrow v_i \cong 0 \rightarrow v_+ - v_- \cong 0 \rightarrow v_+ \cong v_-$

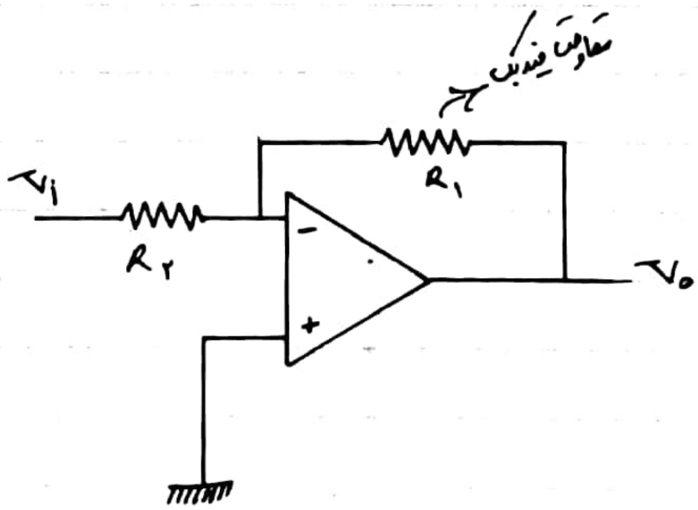
بازخورد منفی در آپ امپ

برای کاهش بهره و افزایش محدوده کارکرد خطی، مسیری از خروجی به پایه‌ی معکوس کننده برقرار می‌کنیم. با این کار مدار دارای بازخورد منفی خواهد شد.

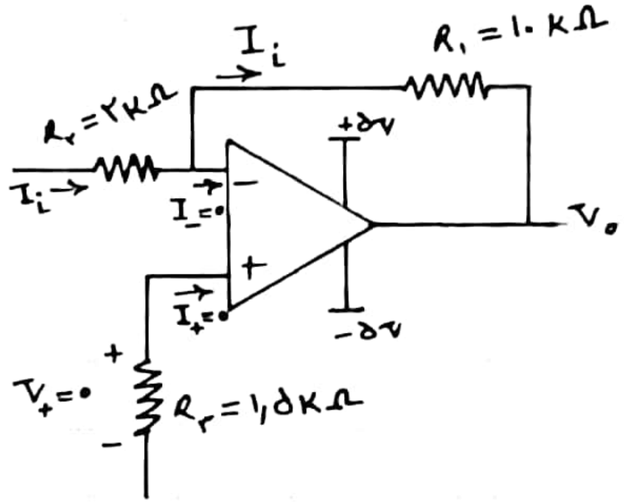
برای تحلیل مدارهای آپ امپی با بهره منفی به شرط کارکرد در ناحیه‌ی خطی، از دو شرط زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} v_+ = v_- \\ I_+ = 0 \;,\; I_- = 0 \end{cases}$$





مثال : در مدارهای تقویت کننده‌ی زیر با فرض ایده‌آل بودن آپ امپ، بهره ولتاژ چقدر است؟



فرض ها: $\begin{cases} V_+ = V_- \\ I_+ = I_- = 0 \end{cases}$

$$V_i - V_- = R_2 I_i$$

$$I_i = \frac{V_i}{R_2}$$

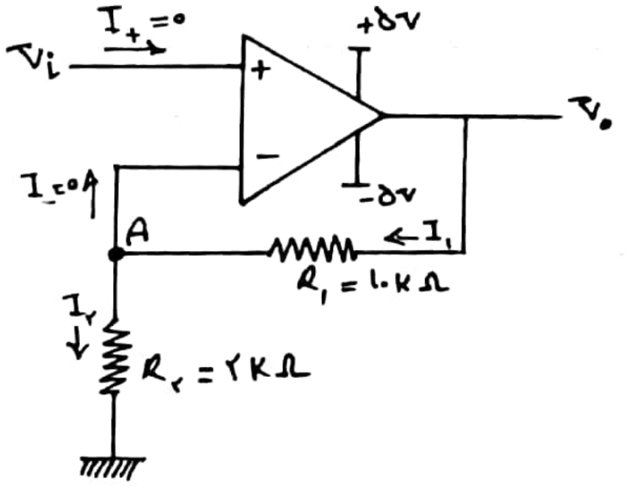
قانون اهم برای مقاومت R_1 $\Rightarrow$ $V_- - V_o = R_1 I_i$

$$V_o = -R_1 I_i = -R_1 \times \frac{V_i}{R_2} \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = A_v = -\frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{-10\,K\Omega}{2\,K\Omega} = -5$$

مثال :

$A_v = ?$



حل :

$$\begin{cases} V_+ = V_- \\ I_+ = I_- = 0 \end{cases}$$

$$V_- = V_+ = V_i \quad , \quad I_2 = \frac{V_i}{R_2}$$

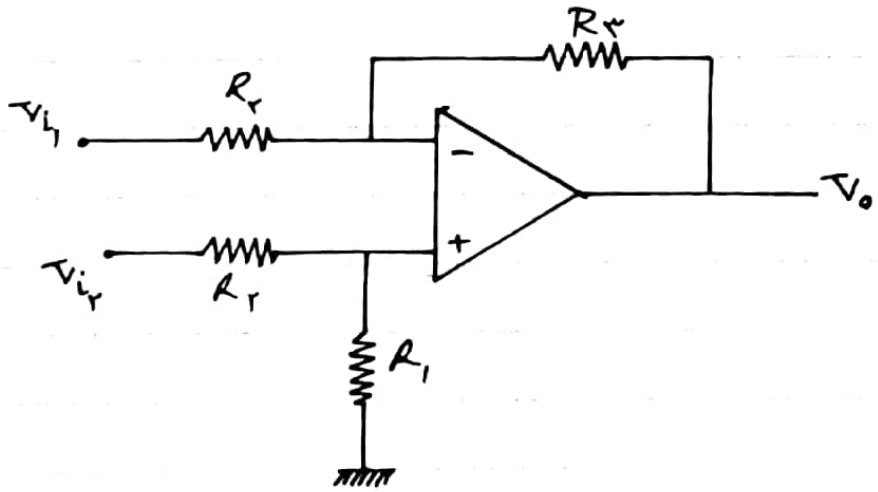
$$KVL(A) \to I_2 + I_- - I_1 = 0 \to I_1 = I_2 = \frac{V_i}{R_2}$$

$$V_o - V_- = R_1 I_1$$

$$V_o - V_i = R_1 \times \frac{V_i}{R_2} \to V_o = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_i$$

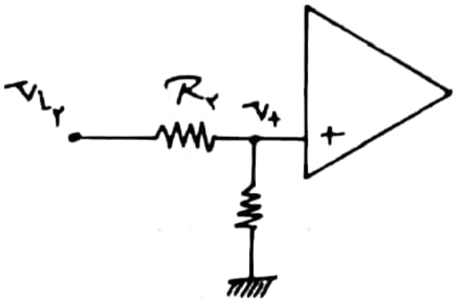
$$\to A_v = \frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_1}{R_2} = 4$$

مثال : درمدار زیر خروجی را برحسب ورودی ها بدست آورید.

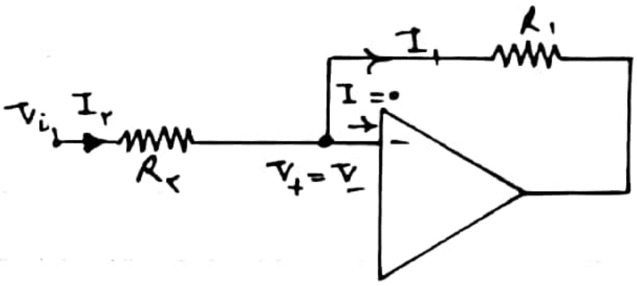


Subject ۹۲
Date

$$\begin{cases} V_+ = V_- \\ I_+ = I_- = 0 \end{cases}$$



$$V_+ = \frac{R_1}{R_1+R_2} \times v_{i_2}$$



$$V_+ = V_- = \frac{R_1}{R_2+R_1} v_{i_2}$$

$$I_- = 0 \rightarrow I_1 = I_2$$

$$v_{i_1} - v_- = R_2 I_2 \rightarrow I_2 = \frac{v_{i_1} - v_-}{R_2} = \frac{v_{i_1} - \frac{R_1}{R_1+R_2} v_{i_2}}{R_2}$$

قانون اهم برای R_1 $\Rightarrow v_- - v_o = R_1 I_1$

$$\frac{R_1}{R_1+R_2} v_{i_2} - v_o = \frac{R_1}{R_2}\left(v_{i_1} - \frac{R_1}{R_1+R_2} v_{i_2}\right)$$

$$v_o = \frac{R_1}{R_1+R_2} v_{i_2} - \frac{R_1}{R_2} v_{i_1} + \frac{R_1^2}{R_1R_2+R_2^2} v_{i_2}$$

$$v_o = \frac{R_1R_2 v_{i_2} - R_1^2 v_{i_1} - R_1R_2 v_{i_1} + R_1^2 v_{i_2}}{(R_1+R_2)R_2} = \frac{R_1R_2(v_{i_2} - v_{i_1}) + R_1^2(v_{i_2} - v_{i_1})}{R_2(R_1+R_2)}$$

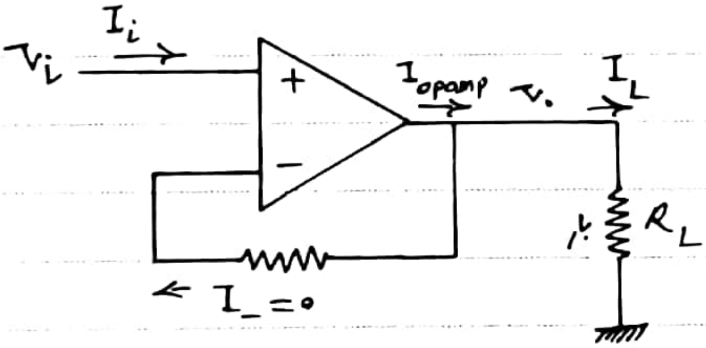
PAPCO

$$= (v_{i_2} - v_{i_1}) \times \frac{R_1(R_1+R_2)}{R_2(R_1+R_2)} = \frac{R_1}{R_2}(v_{i_2} - v_{i_1})$$

$$\boxed{v_o = \frac{R_1}{R_2}(v_{i_2} - v_{i_1})}$$ ← تفاضل دو ورودی را تقویت می‌کند

بهره‌ی ولتاژ تفاضلی $A_d = \frac{v_o}{v_{i_1} - v_{i_2}} = -\frac{R_1}{R_2}$

بافر با آپ امپ



$$\left.\begin{array}{l} v_+ = v_- \\ I_+ = I_- = 0 \end{array}\right\}$$

$v_i = v_+$

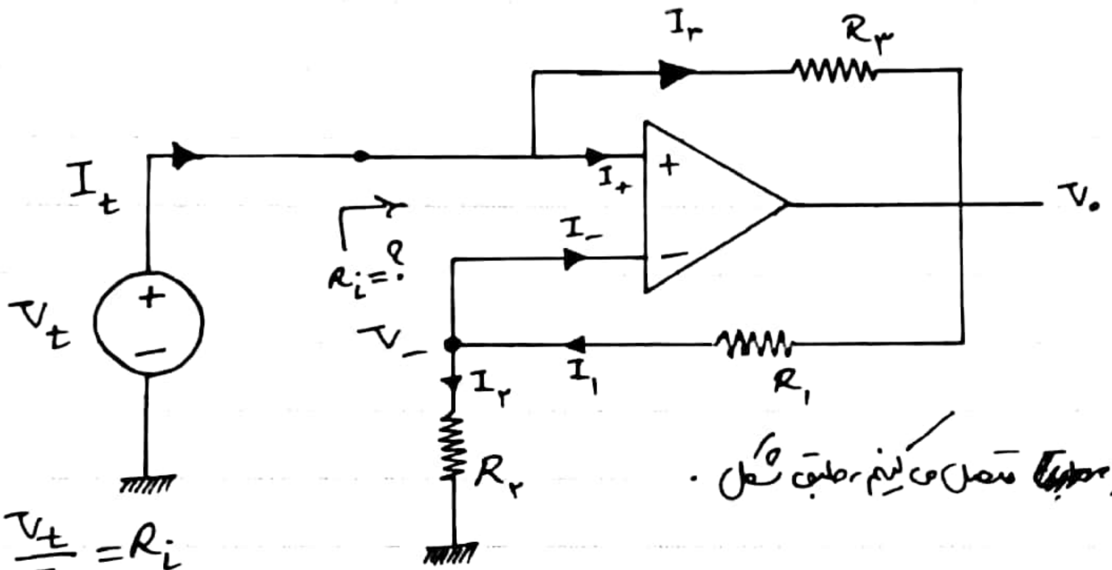
$v_- = v_+ \to v_- = v_i$

$\boxed{I_- = 0} \to v_o = v_i \quad , I_i = I_+ = 0 \quad , I_L = I_{opamp}$

آپ امپ های معمولی تا حدود ۲۰ mA به خروجی می‌توانند جریان بدهند

این مدار جریانی از ورودی نمی‌کشد و ولتاژ خروجی برابر ورودی است و در خروجی می‌تواند جریان بدهد.

در مدار شکل زیر مقاومت دیده شده از ورودی چقدر است؟



$$\frac{v_t}{I_t} = R_i$$

v_t را به مدار متصل می‌کنیم، طبق شکل.

فیدبک منفی برقرار است.

$$\begin{cases} v_+ = v_- \\ I_+ = I_- = 0 \end{cases}$$

$$v_+ = v_t = v_-$$

$$I_- = 0 \rightarrow I_1 = I_2 = \frac{v_-}{R_2} = \frac{v_t}{R_2}$$

$$v_o - v_- = R_1 I_1 \rightarrow v_o - v_i = R_1 \times \frac{v_t}{R_2} \rightarrow v_o = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v_t \quad (2)$$

$$I_+ = 0 \rightarrow I_3 = I_t \quad (1)$$

قانون اهم برای R_3 $\Rightarrow V_t - V_o = R_3 I_3$

$$①, ② \Rightarrow V_t - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_t = R_3 I_t$$

$$-\frac{R_1}{R_2} V_t = R_3 I_t$$

$$\Rightarrow \boxed{R_i = \frac{V_t}{I_t} = -R_3 \times \frac{R_2}{R_1}}$$

Ex: $R_1 = R_2 \rightarrow R_i = -100\ \Omega \ , \ R_3 = 100\ \Omega$

این مدار دارای مقاومت منفی است

Subject
Date

فصل ۴

معادلات مرتبه اول

PAPCO

مرتبه‌ی مدار

حل هر مدار شامل سلف، خازن و مقاومت در حالت گذرا می‌توانند به حل یک معادله دیفرانسیل منجر شود
تحلیل زمانی

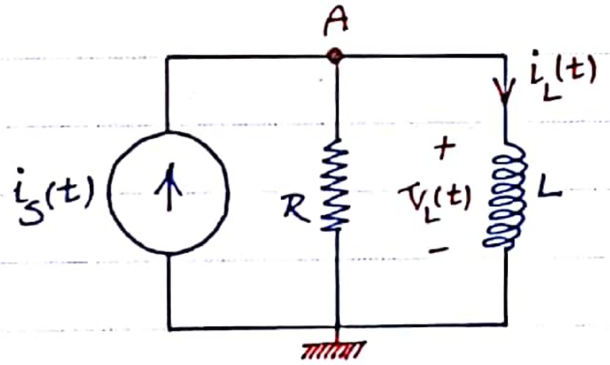
مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل توصیف کننده‌ی مجهول مورد نظر، همان مرتبه‌ی مدار است.

← (بالاترین درجه‌ی مشتق موجود در معادله دیفرانسیل)

مداری که شامل یک المان از جنس سلف و خازن (یا یک المان معادل از این جنس) باشد، معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول خواهد داشت.

مثال:

حالت اول (شارژ سلف) :



$$KCL(A) \Rightarrow -i_S(t) + \frac{v_A}{R} + i_L(t) = 0$$

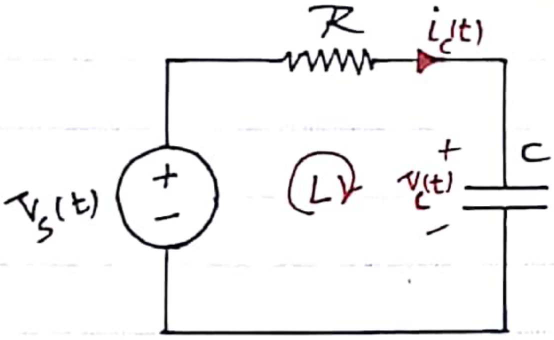
$$v_A = v_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow -i_S(t) + \frac{L}{R}\,\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0$$

Subject ۹۷
Date

$$\rightarrow \boxed{\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{R}{L} i_s(t)}$$ معادله‌ی دیفرانسیل برای جریان سلف

حالت دوم (شارژ خازن)

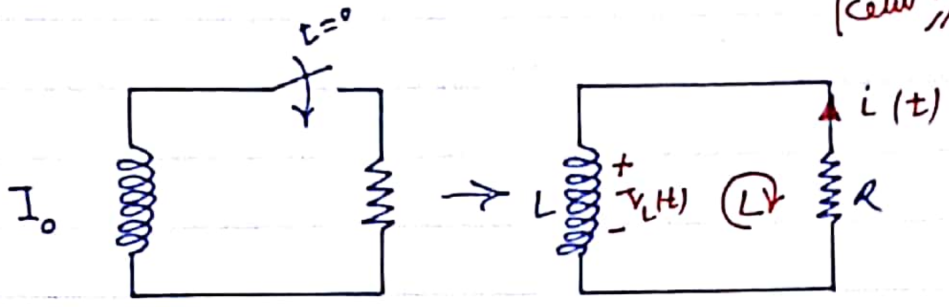


$$KVL \; (L) \rightarrow -v_s(t) + R\, i_c(t) + v_c(t) = 0$$

$$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \rightarrow -v_s(t) + RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{v_s(t)}{RC}}$$ معادله‌ی دیفرانسیل برای ولتاژ خازن

حالت سوم (دشارژ سلف)



KVL (L) $\rightarrow -V_L(t) - i_L(t)R = 0$

$$\Rightarrow -L\frac{di_L(t)}{dt} - Ri_L(t) = 0$$

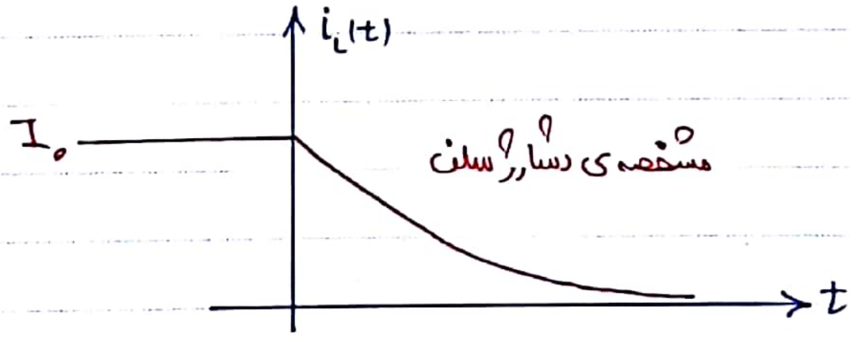
$$\Rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = 0$$

$$\frac{di_L}{i_L} = -\frac{R}{L}dt \xrightarrow{\int} \ln i_L = -\frac{R}{L}t + K_1$$

$$i_L(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

این ضرایب ثابت (مثل K) در معادلات دیفرانسیل با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آید.

$$i_c(0) = I_0 \rightarrow Ke^0 = I_0 \rightarrow K = I_0 \Longrightarrow i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



ثابت زمانی (τ)

در مدار دشارژ مرتبه‌ی اول یک ثابت زمانی معادل زمانی است که متغیر به حدود ۰/۳۷ مقدار اولیه خود برسد.

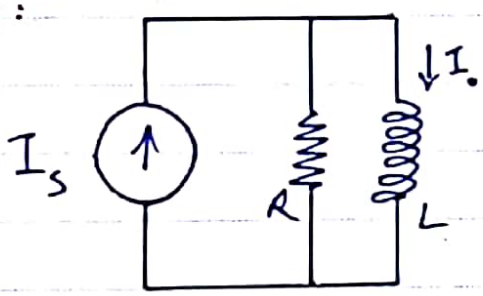
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

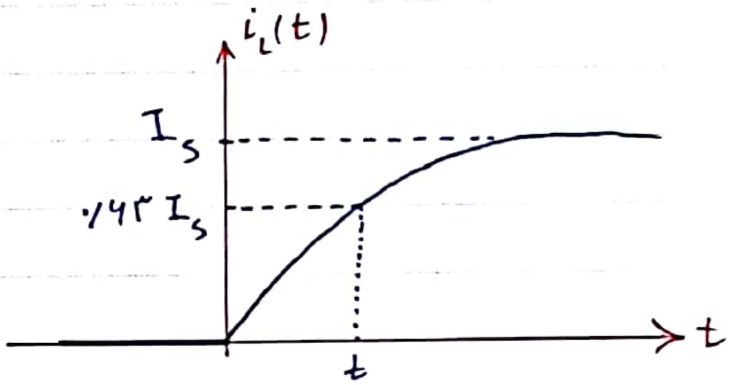
$$t = \frac{L}{R} \to i_L(t=\tau) = I_0 e^{-1} \cong 0/37\, I_0$$

ثابت زمانی مدار RL

توجه: ثابت زمانی برای مشخصه‌ی شارژ، زمانی است که متغیر به حدود ۰/۶۳ مقدار نهایی خود برسد.

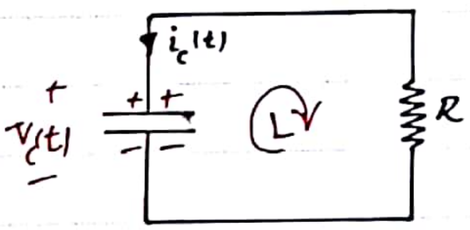
مثال:





در مدار DC ، سلف نهایتاً اتصال کوتاه می‌شود

حالت چهارم (دشارژ خازن)



$$Q = CV \to V = \frac{Q}{C} \quad , \quad Q\downarrow \to V\downarrow$$

Subject ۱۰۰
Date

$$KVL \textcircled{L} \rightarrow -v_c(t) - R i_c(t) = 0 \rightarrow -v_c(t) - RC\frac{dv_c(t)}{dt} = 0$$

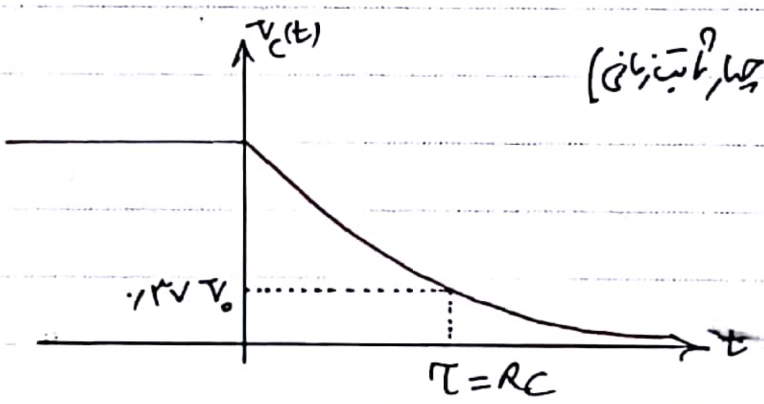
$$\Rightarrow \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = 0$$

$$\frac{dv_c}{v_c} = -\frac{1}{RC} dt \xrightarrow{\int} \ln v_c = -\frac{1}{RC} t + K_1$$

$$\left.\begin{aligned} &v_c(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} \\ &t=0 \rightarrow v_c(0) = v_0 = K e^0 \end{aligned}\right\} \rightarrow v_c(t) = v_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t = RC \rightarrow v_c(t) \cong 0/37 v_0$$

ثابت زمانی مدار RC



این خازن تقریباً بعد از 4τ (چهار ثابت زمانی)

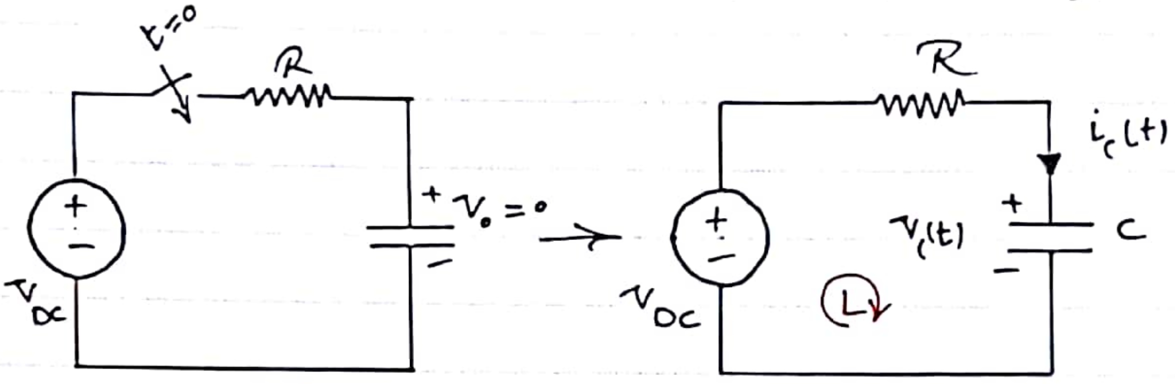
خالی شده است.

$$v_c(4) = v_0 e^{-4} \cong 0/02 v_0$$

PAPCO

حل معادله‌ی دیفرانسیل شارژ

خازنی که ولتاژ اولیه ندارد و با منبع در حال شارژ است.



$$KVL(L) \Rightarrow -v_{DC} + R i_C(t) + v_C(t)$$

$$-v_{DC} + RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{v_{DC}}{RC} \longrightarrow$$ معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول غیرهمگن

پاسخ: $v_C(t) = \underbrace{v_{C_h}(t)}_{} + \underbrace{v_{C_p}(t)}_{}$

← پاسخ همگن (همورزن) . ← پاسخ خصوصی (اجباری)

محاسبه‌ی پاسخ همگن

به جای مشتق مرتبه‌ی n ام، S^n جایگزین می‌کنیم و معادله درجه n را حل می‌کنیم.

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\dots+a_n y(t)=0$$

$$\to S^n+a_1S^{n-1}+a_2S^{n-2}+\dots+a_n=0$$

$$\to \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix}$$ اگر جواب ها متمایز بود $\Rightarrow y_h(t)=k_1e^{S_1t}+k_2e^{S_2t}+\dots+k_ne^{S_nt}$

S ها ~~~~ فرکانس های طبیعی مدار نامیده می‌شوند.

$$\frac{dV_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}V_c(t)=0$$ معادله‌ی همگن

$$\boxed{S+\frac{1}{RC}=0\to S=-\frac{1}{RC}=-\frac{1}{\tau}\quad \left(\frac{1}{\text{زمان}}\ \text{ها تعریف فرکانس است}\right)}$$

$$V_{c_h}(t)=ke^{-\frac{t}{RC}}$$

جواب خصوصی (حدسی)

حدس اولیه این است که پاسخ خصوصی هم شکل با قسمت دوم معادله دیفرانسیل باشد و با جایگذینی در معادله دیفرانسیل، آن را ارضا می کند.

$$v_{c_p}(t) = K_2 \rightarrow$$ ثابت

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{v_{DC}}{RC}$$

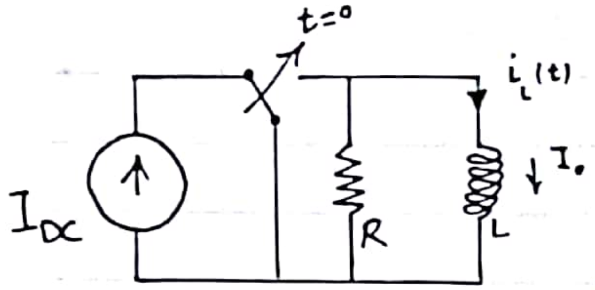
$$\frac{dK_2}{dt} + \frac{1}{RC} K_2 = \frac{v_{DC}}{RC} \rightarrow K_2 = v_{DC}$$

$$v_c(t) = \underbrace{K_1 e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{جزء همگن پاسخ}} + \underbrace{v_{DC}}_{\text{جزء خصوصی پاسخ}}$$

محاسبه K_1

$$v_c(0) = 0 = K_1 e^0 + v_{DC} \rightarrow K_1 = -v_{DC}$$

در نهایت داریم $\Rightarrow$ $\boxed{v_c(t) = v_{DC}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$ معادله‌ی شارژ خازن

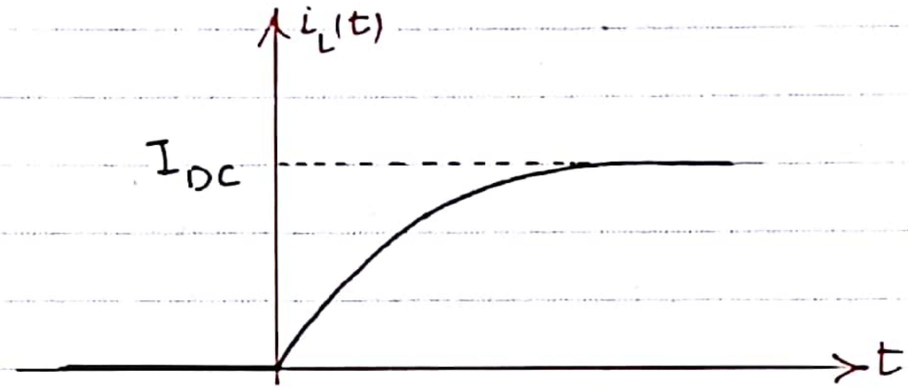


$$t>0 \rightarrow -I_{DC} + \frac{V_L}{R} + i_L = 0$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_{DC} \rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} I_{DC}$$

$$\boxed{i_L(t) = I_{DC}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad t \geq 0}$$

معادله‌ی شارژ سلف



(جریان سلف همیشه پیوسته بوده است)

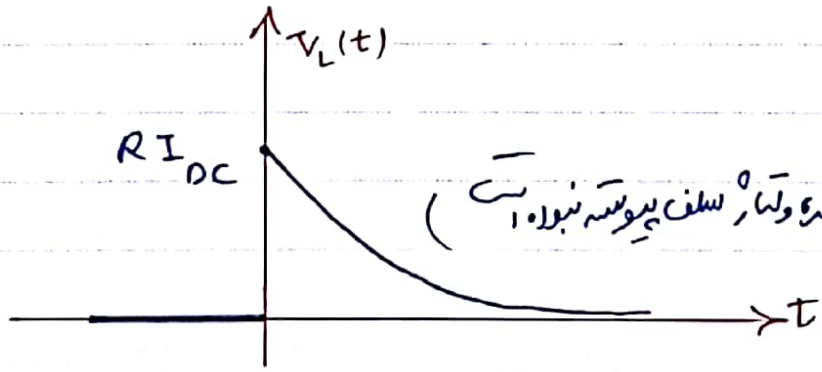
$$i_L(t) = I_{DC}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad t > 0$$

$$V_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = R I_{DC} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$V_L(0^+) = R I_{DC}, \quad V_L(0^-) = 0$$

صفر مثبت یعنی اندکی زمانی بعد از بستن کلید

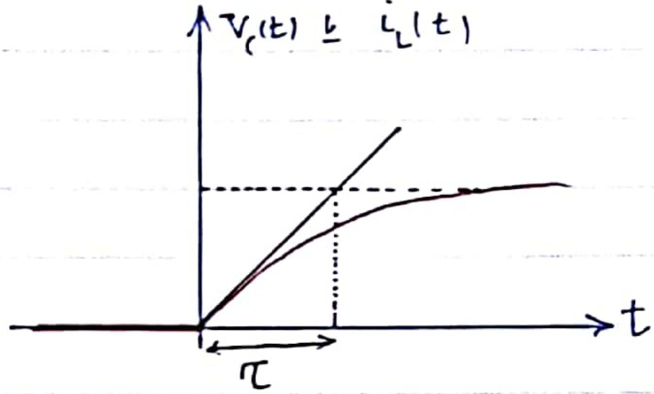
صفر منفی یعنی اندک زمانی قبل از بستن کلید



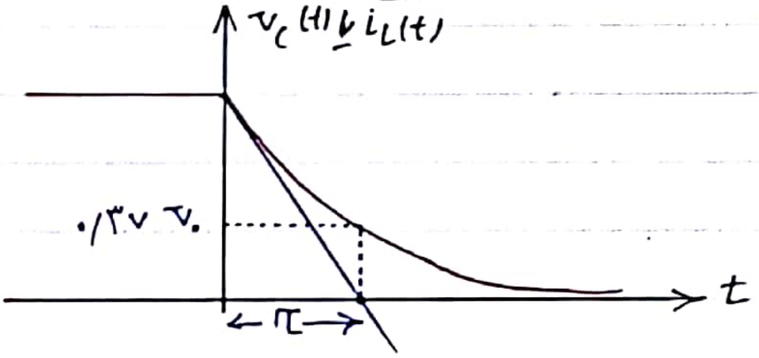
(در لحظه‌ی صفر، ولتاژ سلف پیوسته نبوده است)

ویژگی دیگر مشخصه شارژ و دشارژ

خط مماس بر مشخصه شارژ در زمان شروع شارژ، سطح شارژ نهایی را در زمان یک ثابت زمانی قطع می‌کند.



خط مماس مشخصه‌ی دشارژ در نقطه‌ی شروع، سطح صفر را در فاصله‌ی زمانی یک ثابت زمانی قطع می‌کند.

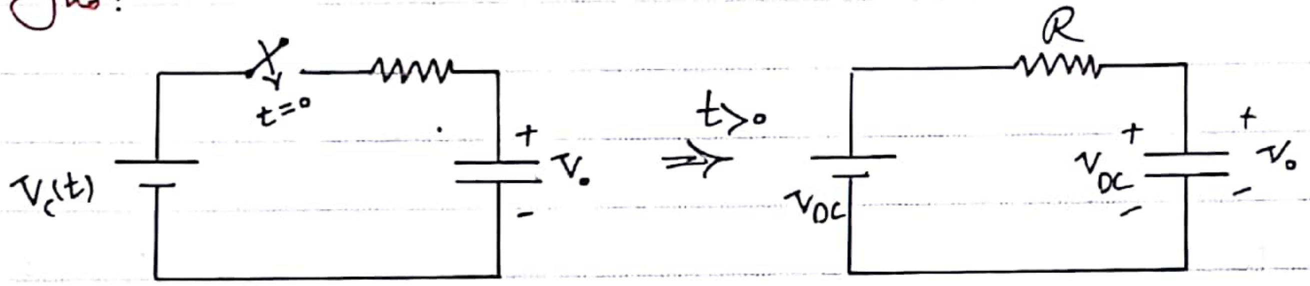


حالت های کلی تر: ۱- سلف با جریان اولیه در مدار شارژ

۲- خازن با ولتاژ اولیه در مدار شارژ

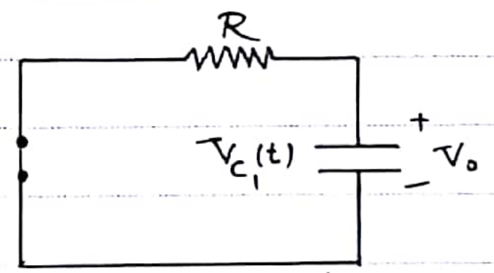
برای تحلیل این حالت ها از خاصیت خطی بودن مدار استفاده می شود. در مدار خطی قضیه جمع آثار برقرار است. شرایط اولیه می تواند به صورت یک ورودی در نظر گرفته شود.

مثال:



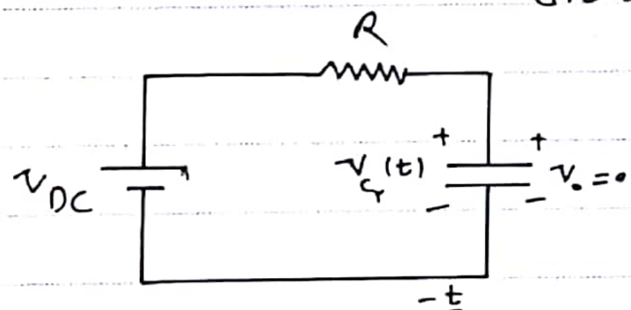
چون دو ولتاژ v_0 و v_{DC} روی خازن اعمال می شوند، مدار را در دو حالت بررسی می کنیم:

حالت ①



$$v_{c_1}(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

حالت ②



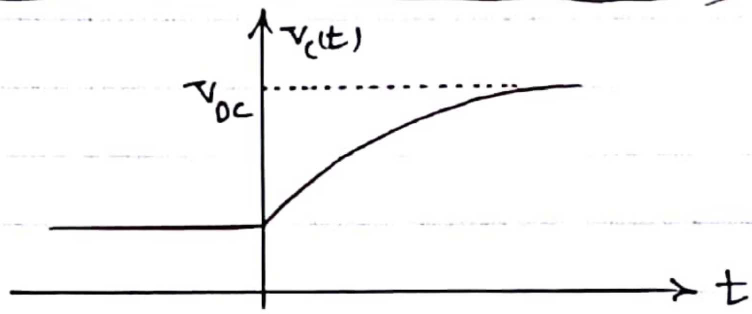
$$v_{c_2}(t) = v_{DC}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

طبق قضیه جمع آثار:

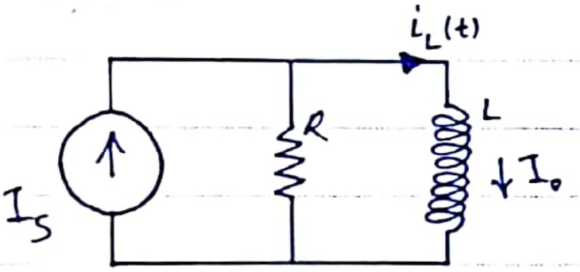
$$v_C(t) = v_{C_1}(t) + v_{C_2}(t)$$

$$= v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{DC}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\boxed{v_C(t) = v_{DC} + (v_0 - v_{DC})\, e^{-t/\tau} \quad , \quad \tau = RC \quad , \quad t \geq 0}$$ حالت کلی معادله‌ی شارژ و دشارژ



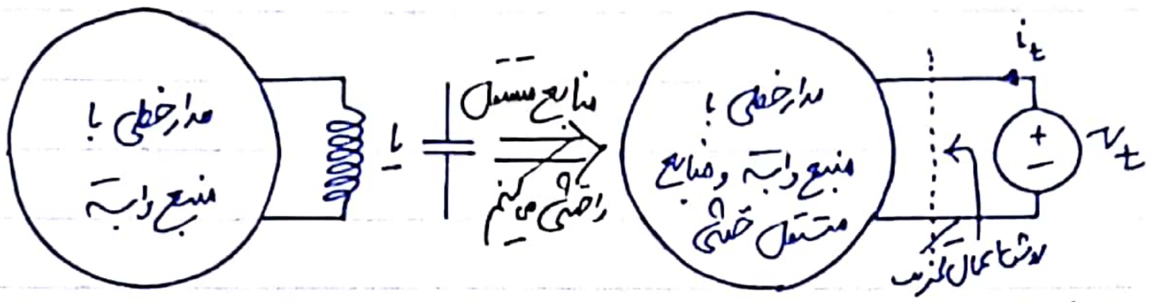
و برای سلف داریم:



$$\boxed{i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau} + I_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad , \quad \tau = L/R}$$ حالت کلی معادله‌ی شارژ سلف

Subject ۱۰۸
Date ۹۷,۲,۲ یکشنبه

تحلیل مدارهای مرتبه‌ی اول با منبع وابسته



$$R_{eq} = \frac{v_t}{i_t}$$

$$\tau = R_{eq} C \Leftarrow RC \text{ برای مدار}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \Leftarrow RL \text{ برای مدار}$$

تحلیل مدار مرتبه اول از روی شرایط در 0^+ , $+\infty$

فرم جواب مدار مرتبه‌ی ۱ : $y(t) = K_1 e^{-t/\tau} + K_2 \quad , \quad t>0$

$$y(0^+) = K_1 e^{0} + K_2 \rightarrow y(0^+) = K_1 + K_2$$

$$t \rightarrow +\infty \xRightarrow{\tau>0} y(+\infty) = K_1 e^{-\infty} + K_2 \rightarrow y(+\infty) = K_2$$

نتیجه می‌گیرد $\Rightarrow y(0^+) = K_1 + y(+\infty) \rightarrow K_1 = y(0^+) - y(+\infty)$

$$\tau = \begin{cases} R_{eq} C & \text{برای مدار } RC \\ \dfrac{L}{R_{eq}} & \text{برای مدار } RL \end{cases}$$

جواب معادله‌ی دیفرانسیل با استفاده از شرایط در 0^+ و $+\infty$ $\Rightarrow$ $y(t) = [y(0^+) - y(+\infty)]e^{-t/\tau} + y(+\infty)$, $t>0$

سلف $\rightarrow$ معمولاً $i_L(0^-) = i_L(0^+)$

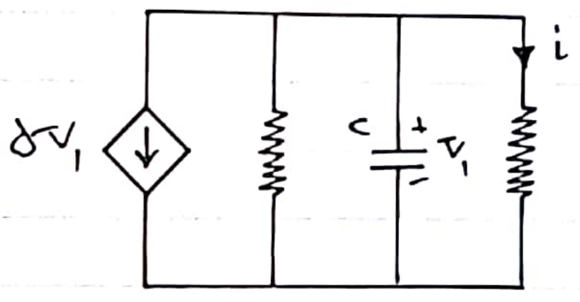
خازن $\rightarrow$ معمولاً $v_C(0^-) = v_C(0^+)$

در مدارهای با ورودی DC ، با گذر زمان طولانی سلف‌ها اتصال کوتاه می‌شوند و خازن‌ها مدار باز خواهند شد

در اینصورت کافی است یک مدار مقاومتی تحلیل شود تا $y(+\infty)$ بدست آید.

گذر زمان طولانی یعنی $t > 5\tau$

مثال : سؤال ۱۵ فصل ٤



$i(t) = ?$, $t>0$

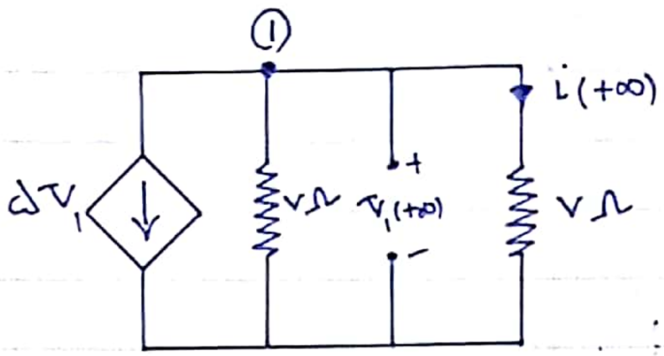
$C = ٤mF$

$v_1(0) = ۳V$

$v_1(0^-) = ۳V \rightarrow v_1(0^+) = v_1(0^+) = ۳V$

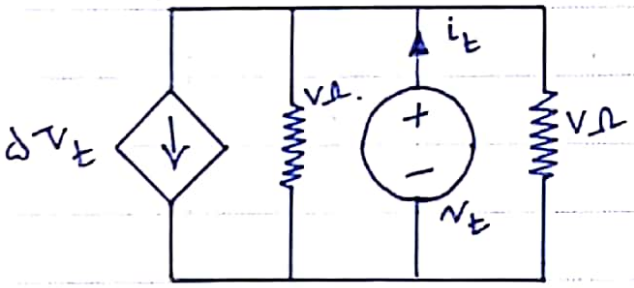
$$i(0^+) = \frac{v_1(0^+)}{۷\Omega} = \frac{v(0^-)}{۷} = ۳/۷\ A$$

$i(+\infty) = ?$

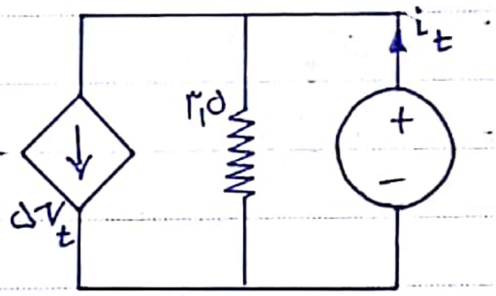


$$KCL① \Rightarrow ۵ \times v_1(+\infty) + \frac{v_1(+\infty)}{۷} + \frac{v_1(+\infty)}{۷} = ۰$$

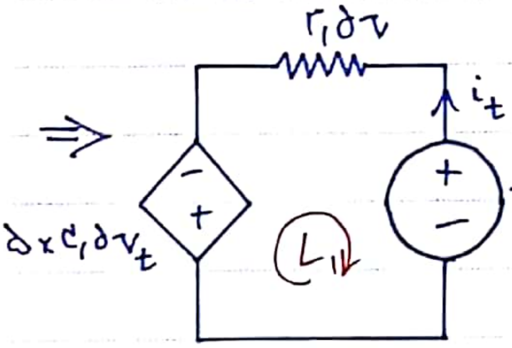
$$\Rightarrow v_1(+\infty) = ۰ \rightarrow i(+\infty) = \frac{v_1(+\infty)}{۷\Omega} = ۰$$



⇒



⇒



$$KVL(L_1) \rightarrow ۱۷٫۵ v_t - ۳٫۵ i_t + v_t = ۰$$

$$۱۸٫۵ v_t = ۳٫۵ i_t$$

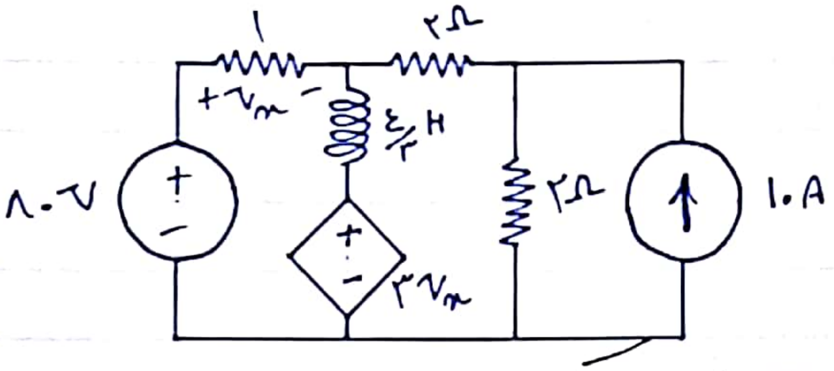
$$\frac{v_t}{i_t} = ۰٫۱۸۹\,\Omega$$

$$\tau = R_{eq} C = ۰٫۱۸۹ \times ۴mF = ۰٫۷۶\,ms$$

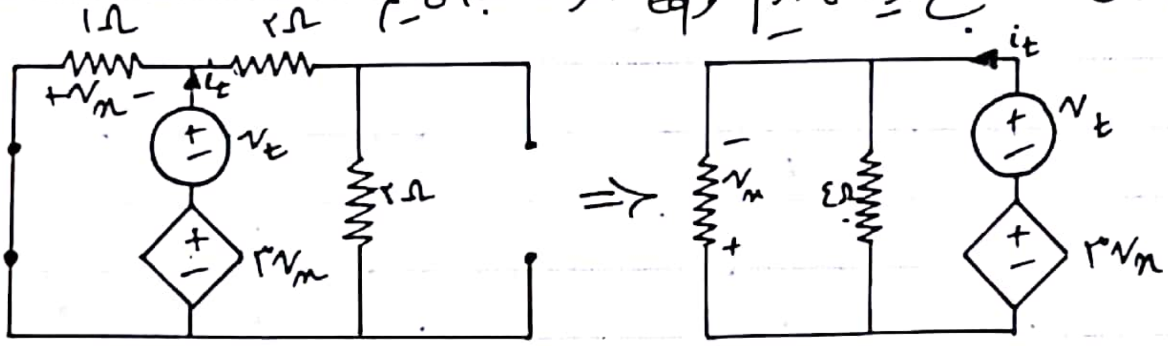
$$i(t) = \left[\left(i(0^+) - i(+\infty)\right)e^{-t/\tau} + i(+\infty)\right] \quad , \; t > ۰$$

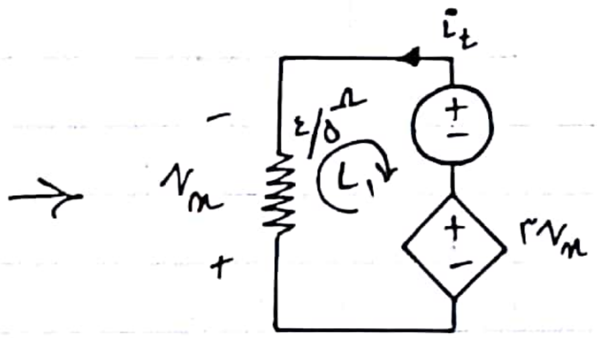
$$i(t) = \left(\frac{۳}{۷} - ۰\right) e^{-\frac{t}{۰٫۷۶ms}} + ۰ = ۰٫۴۲۸\, e^{-\frac{t}{۰٫۷۶ms}}$$

در مدار شکل زیر $i_L(0)=2A$ است. $t>0$ ، $i_L(t)=?$ ، $v_x(t)=?$



به جای سلف منبع تحریک می‌گذاریم و R_{eq} را محاسبه می‌کنیم:





$KVL(L_1) \Rightarrow v_x + v_t + 3v_x = 0$

$$\boxed{v_x = -i_t \times \frac{4}{5}}$$

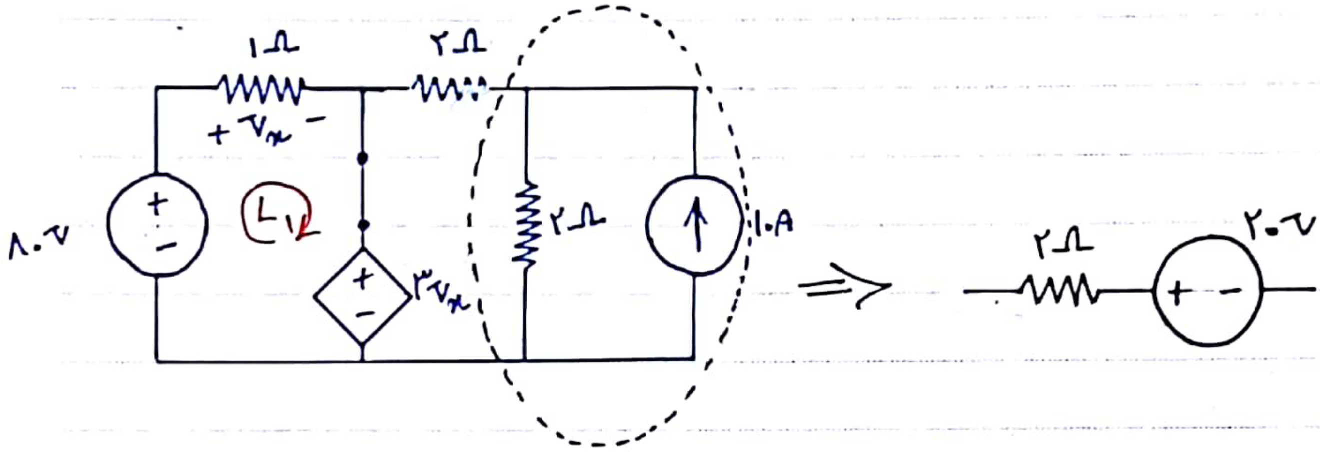
$$\Rightarrow 4v_x + v_t = 0 \to 4 \times -i_t \times \frac{4}{5} + v_t = 0$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{16}{5}\,\Omega \to \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{4/3}{16/5} = \frac{5}{12}\,s$$

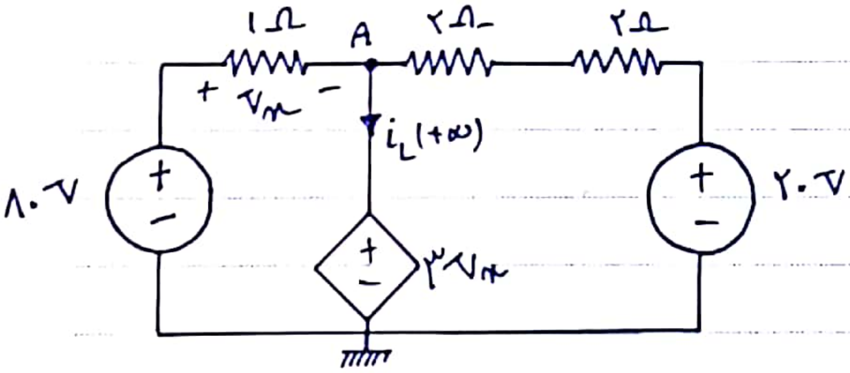
شرایط در 0^+ :

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2A$ جریان در سلف پیوسته است

شرایط در $+\infty$: سلف اتصال کوتاه می‌شود.



$$KVL(L_1) \rightarrow -80 + V_x + 3V_x = 0 \rightarrow V_x = 20V$$



$$KCL(A) \rightarrow i_L(+\infty) + \frac{V_A - 80}{1} + \frac{V_A - 20}{4} = 0$$

$$V_A = 3V_x \rightarrow \boxed{60V = V_A}$$

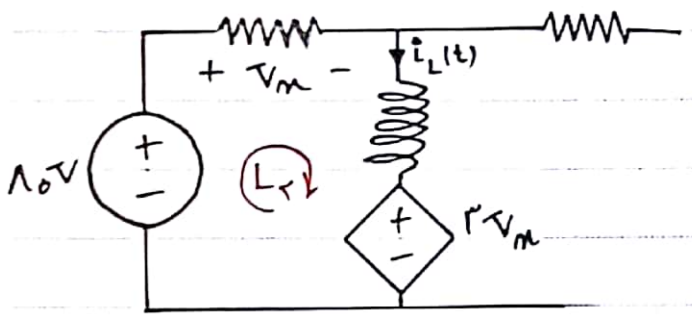
$$i_L(+\infty) + \frac{60-80}{1} + \frac{60-20}{4} = 0 \rightarrow i_L(+\infty) = 10A$$

نوشتن جواب :

$$i_L(t)=\left[i_L(0^+)-i_L(+\infty)\right]e^{-t/\tau}+i_L(+\infty)$$

$$\Rightarrow i_L(t)=[2-10]e^{-\frac{12t}{5}}+10=-8e^{-2.4t}+10\,,\quad t\geq 0$$

محاسبه‌ی $v_x(t)$:



$$KVL\,(L_2)\rightarrow -80+v_x+v_L(t)+3v_x=0$$

$$4v_x=-v_L(t)+80$$

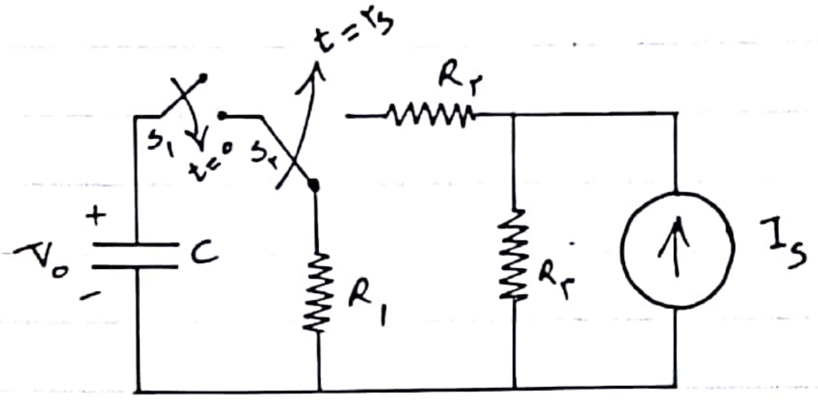
$$v_x=-\frac{1}{4}v_L(t)+20=-\frac{1}{4}\left(L\frac{di_L}{dt}\right)+20$$

$$v_x(t)=-\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times\left(8\times 2.4\,e^{-2.4t}\right)+20$$

$$v_x(t)=-6.4\,e^{2.4t}+20\,,\quad t>0$$

توجه : با حل معادله دیفرانسیل برای یک مجهول، سایر مجهولات از ارتباط با مجهول بدست آمده، قبلاً محاسبه شده‌اند.

مدارهای کلیدزنی با چند ثابت زمانی

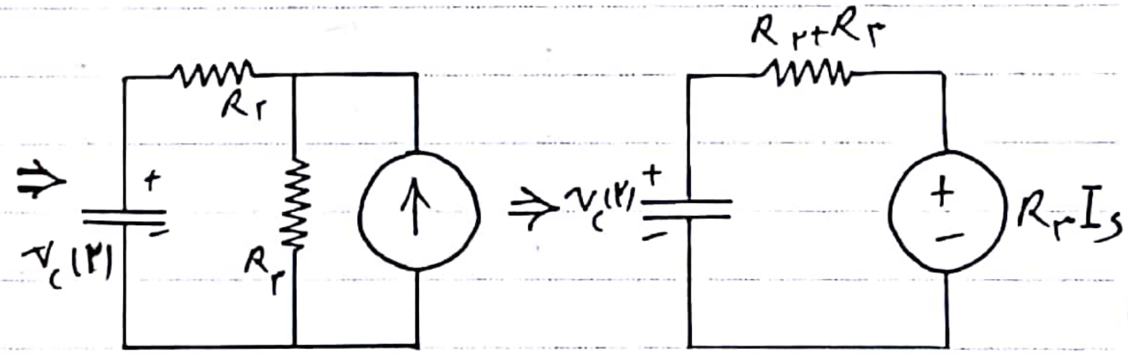


$$0 < t < 2 \rightarrow \tau_1 = R_1 C$$

$$v_C(t) = v_0 e^{-t/\tau_1}$$

$$t > 2 \rightarrow \tau_2 = (R_2 + R_3) C$$

به ازای $t=2$ و بیشتر از آن، مدار اینگونه است

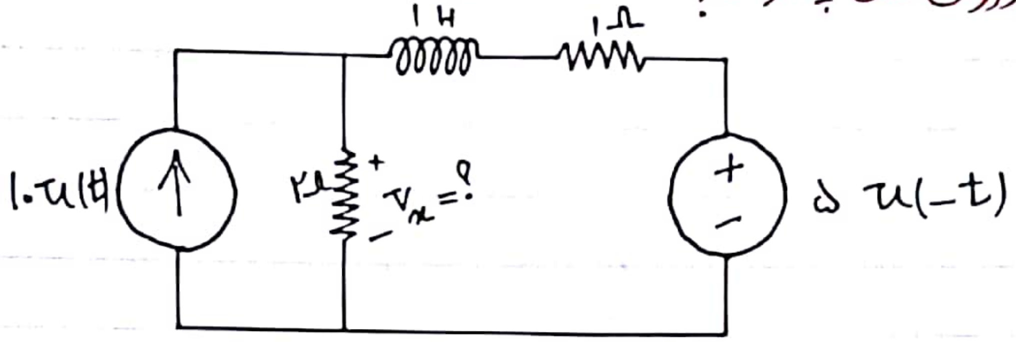


$$v_C(t) = \underbrace{v_C(2) e^{-\frac{t-2}{\tau_2}}}_{\text{اثر ولتاژ اولیه}} + \underbrace{R_3 I_s \left(1 - e^{-\frac{t-2}{\tau_2}}\right)}_{\text{اثر منبع در محاسبه‌ی پاسخ}}$$

(ولتاژ اولیه: ولتاژ در انتهای زمان بازه‌ی قبل)

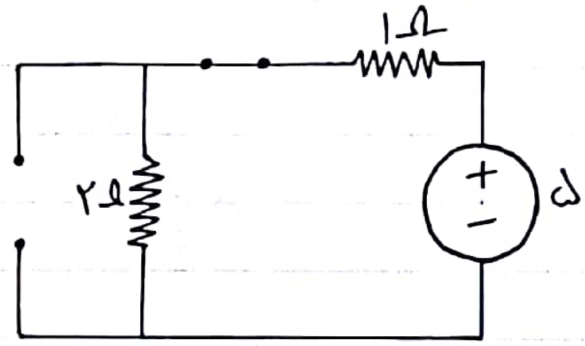
Subject ۱۱۵
Date

مدار مرتبه‌ی اول با ورودی های پله و ضربه



$$u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & -\infty < t < 0 \end{cases}$$

$-\infty < t < 0 \rightarrow$
زمان طولانی مدار که
تحت اعمال منبع DC بود.

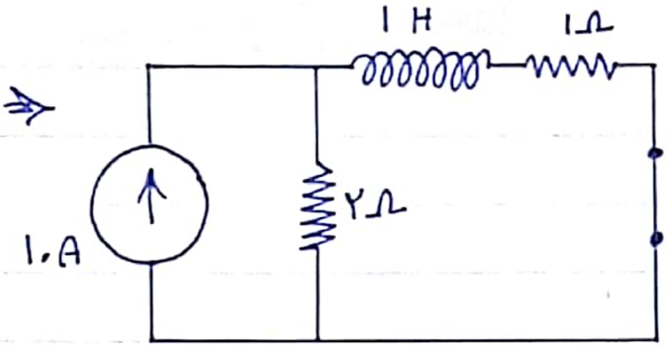


$$i_L(0) = -\frac{5V}{3\Omega} = -\frac{5}{3}A$$

به‌جای محاسبه‌ی v_x ابتدا $i_L(t)$ را حساب می‌کنیم.

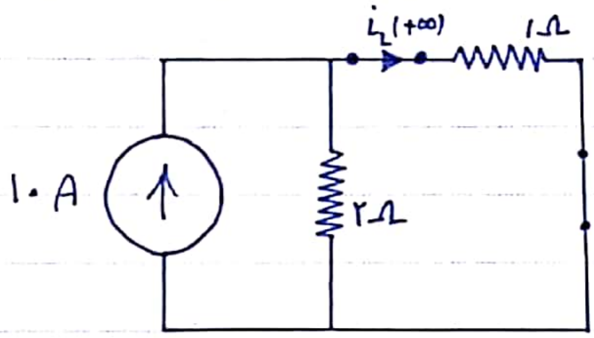
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = -\frac{5}{3}A$$

$t>0 \Rightarrow$



شرایط در $+\infty$:

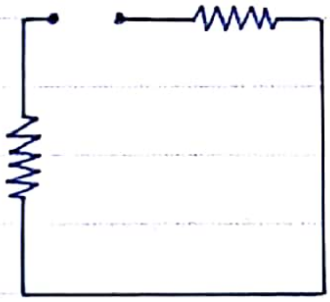
با توجه به اعمال منبع DC در مدت طولانی، سلف اتصال کوتاه خواهد شد.



$$i_L(+\infty) = \frac{2}{2+1} \times 10A = \frac{20}{3} A$$

در محاسبه‌ی مقاومت معادل، منابع مستقل مدار، خنثی می‌شوند.

$$\tau = \frac{1}{R_{eq}} = ?$$



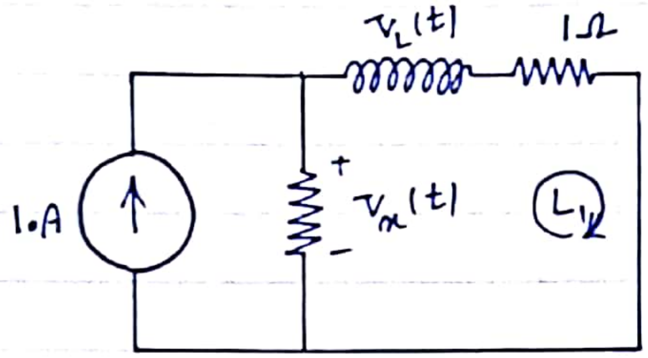
$$R_{eq} = 3\Omega \;, \; \tau = \frac{1}{3} s$$

$$i_L(t) = \left[i_L(0^+) - i_L(+\infty)\right] e^{-3t} + i_L(+\infty)$$

$$= \left[-\frac{5}{3} - \frac{20}{3}\right] e^{-3t} + \frac{20}{3} \rightarrow i_L(t) = \frac{-25}{3} e^{-3t} + \frac{20}{3}$$

$$t \geq 0$$

محاسبه‌ی v_x در $t>0$:



$$KVL\ (L_1) \Rightarrow -v_x(t) + v_L(t) + (1\Omega \times i_L(t)) = 0$$

$$v_x(t) = i_L(t) + L\frac{di_L}{dt} = -\frac{25}{3}e^{-3t} + \frac{20}{3} + 25e^{-3t}$$

$$\Rightarrow v_x(t) = \frac{50}{3}e^{-3t} + \frac{20}{3}\ ,\quad t>0$$

آیا $v_x(t)$ در صفر پیوسته بوده؟ (قطعاً نبوده است)

$$v_x(0^-) = -i_L(0^-) \times 2\Omega = \frac{10}{3}\ V$$

$$v_x(0^+) = \frac{50}{3}e^0 + \frac{20}{3} = \frac{70}{3}\ V$$

علت ناپیوستگی v_x، در واقع پیوسته بودن جریان سلف است.

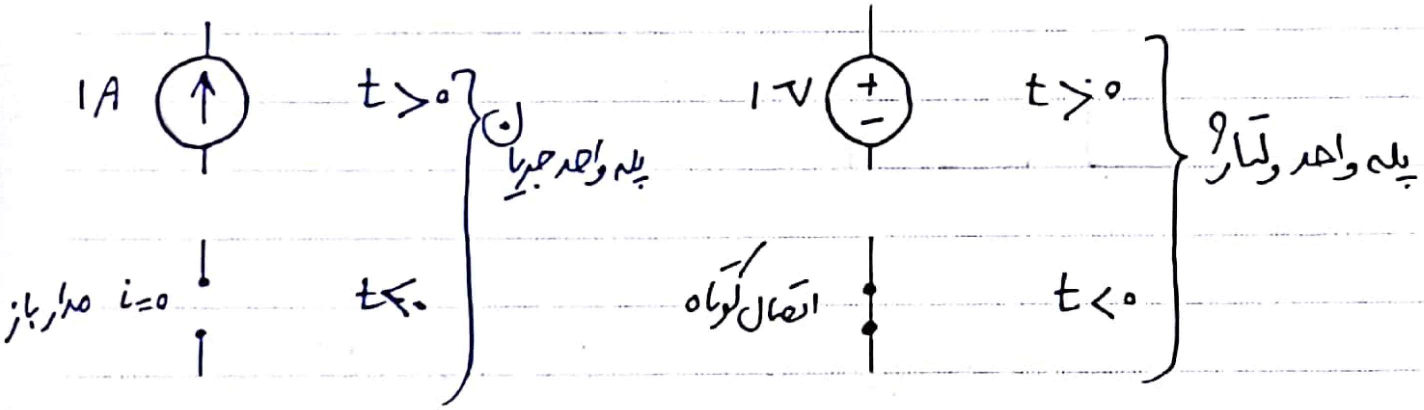
وقتی منبع جریان وارد مدار می‌شود، جریان گذرنده از سلف را نمی‌تواند تغییر دهد از این رو از مقاومتی می‌گذرد که طبق شکل، با منبع جریان موازی است.

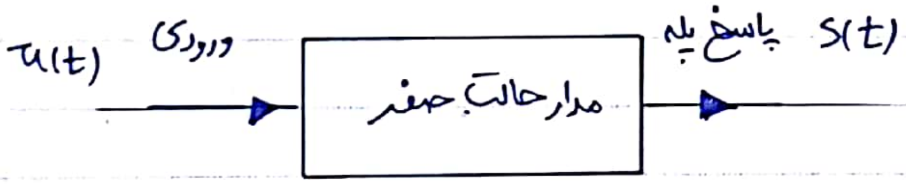
پاسخ پله $s(t)$

عبارتست از پاسخ حالت صفر به ورودی پله واحد

← (منظور از حالت مدار: ولتاژ اولیه خازن ها و جریان اولیه سلف ها)

حالت صفر ← انرژی اولیه در مدار ذخیره نشده است.





پاسخ ضربه $h(t)$

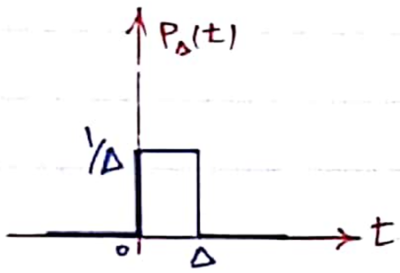
عبارتست از پاسخ حالت صفر به ورودی ضربه واحد.

می‌دانیم که $h(0^-)=0$ و باید $h(0^+)$ را بیابیم.

ارتباط ضربه‌ی واحد و پله‌ی واحد

پالس $P_\Delta(t) = \dfrac{u(t) - u(t-\Delta)}{\Delta}$

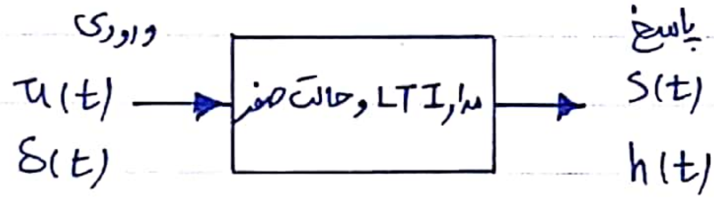
$$P_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & t < 0 \text{ یا } t > \Delta \end{cases}$$



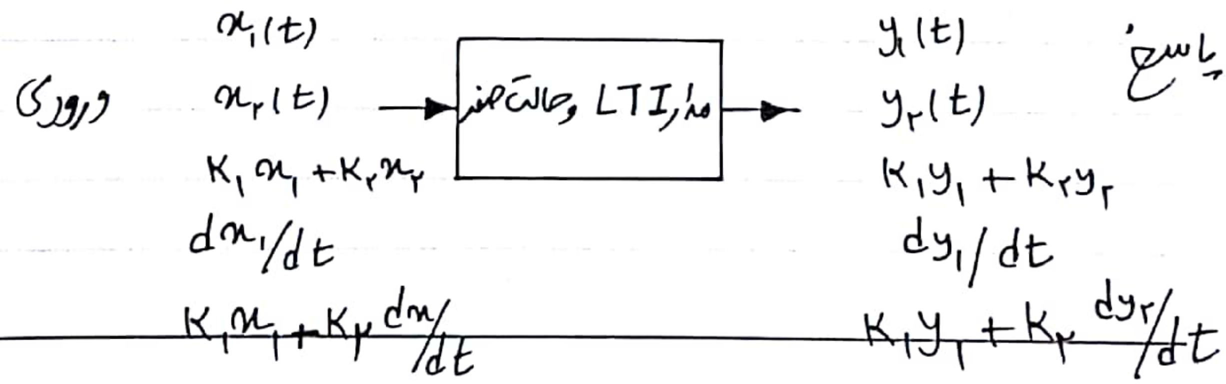
$$\underset{\Delta \to 0}{P_\Delta(t)} \to \frac{du(t)}{dt} \quad , \quad \underset{\Delta \to 0}{P_\Delta(t)} \to \delta(t)$$

$$\Rightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

در مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI) خواص ویژه‌ای برقرار است (فصل ۶)

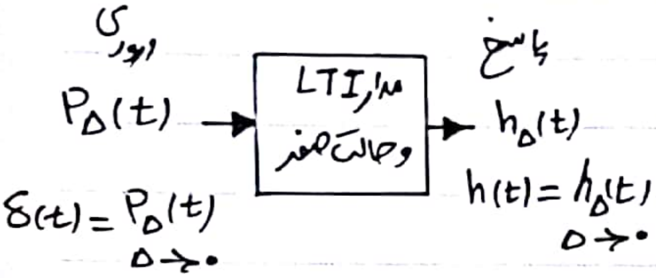


در مدارهای LTI و حالت صفر، همان ارتباطی که بین ورودی‌ها برقرار است بین پاسخ‌ها نیز برقرار است.
پس پاسخ ضربه را می‌توان از پاسخ پله محاسبه کرد.



محاسبه‌ی پاسخ ضربه

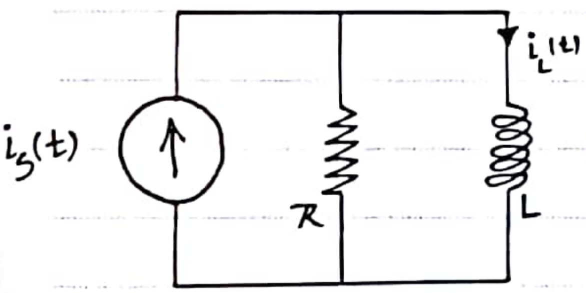
روش‌ها:



۱ـ محاسبه‌ی پاسخ $P_\Delta(t)$ و میل دادن $\Delta \to 0$

۲ـ محاسبه‌ی پاسخ پله و مشتق‌گیری از آن: $h(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}$

۳ـ تشخیص فرم پاسخ ضربه و جایگذاری پاسخ حدسی در معادله دیفرانسیل (فصل ۶ بررسی می‌شود)



مثال روش 1:

پاسخ ضربه = ?

$$P_\Delta(t)=i_s(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & t<0\ ,\ t>\Delta\end{cases}$$

$$0<t<\Delta \Rightarrow h_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}\left(1-e^{-t/\tau}\right),\quad \tau=\frac{L}{R}$$

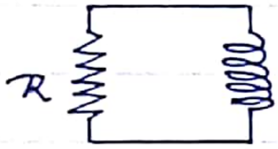
$$t=\Delta^- \to h_\Delta(\Delta^-)=\frac{1}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{\tau}}\right)$$

میدانیم : $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots$

همچنین : $e^{-\Delta/\tau} = 1 - \frac{\Delta}{\tau} + \frac{\Delta^2}{2!\,\tau^2} - + \cdots$

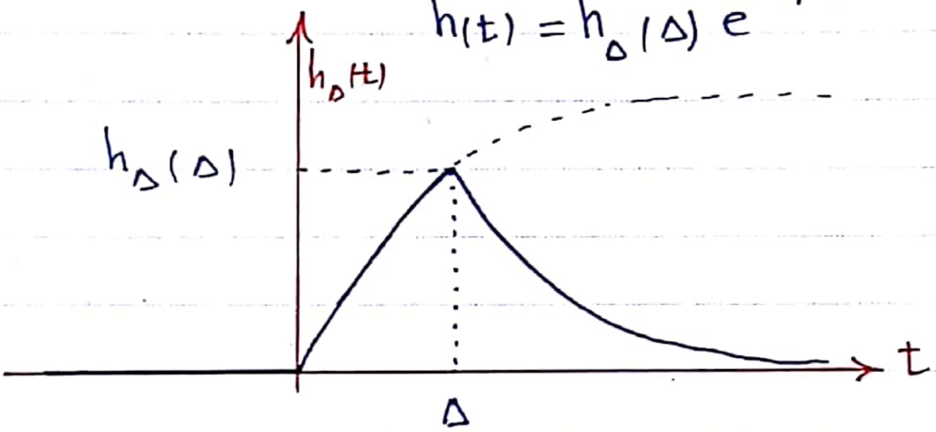
$$h_\Delta(\Delta) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\tau} - \frac{\Delta^2}{2!\,\tau^2} + - \cdots\right)$$

$t > \Delta$

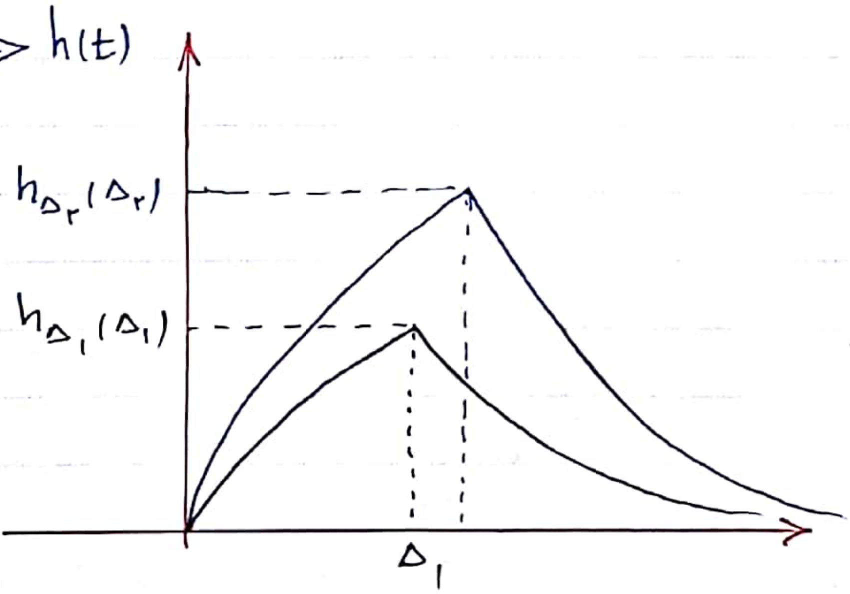


$h_\Delta(\Delta)$: جریان اولیه ابتدای بازه

$$h(t) = h_\Delta(\Delta)\, e^{-t/\tau}$$



$h_\Delta(t) \Rightarrow h(t)$
$\Delta \to 0$



اگر $\Delta \to 0$ آنگاه محدوده‌ی زمانی شارژ جواب خیلی کوچک می‌شود.

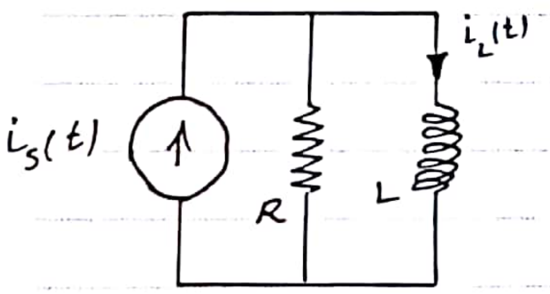
$$h(t) = h_\Delta(\Delta)\, e^{-t/\tau} \quad , t>0$$

$$h(t) = \lim_{\Delta \to 0} h_\Delta(\Delta)\, e^{-t/\tau}\, u(t)$$

$$\lim_{\Delta \to 0} h_\Delta(\Delta) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{R\Delta}{L} - \frac{R^2\Delta^2}{2!\,L^2} + - \dots\right) = R/L$$

$$h(t) = \frac{R}{L}\, e^{-\frac{Rt}{L}}\, u(t)$$

مثال روش ۲:



$$i_s(t) = u(t) \quad ; t>0$$

$$t<0 \quad , i_L(t) = 0$$

$$S(t) = i_L(t) = 1 \times (1 - e^{-t/\tau}) \quad , t>0$$

$$S(t) = (1 - e^{-t/\tau})\, u(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) + (1 - e^{-t/\tau})\, \delta(t)$$

$$h(t) = R/L\, e^{-Rt/L}\, u(t) + 0$$

با فرض اینکه تابع f در صفر پیوسته باشد $f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$

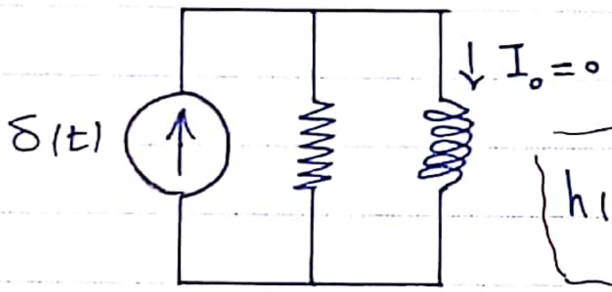
(که فقط حوالی صفر مقدار دارد)

اگر اینگونه بود، باز هم تغییری نمی‌کند:

$$f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t)$$

$$f(t)\,\delta(t-t_1) = f(t_1)\,\delta(t-t_1)$$

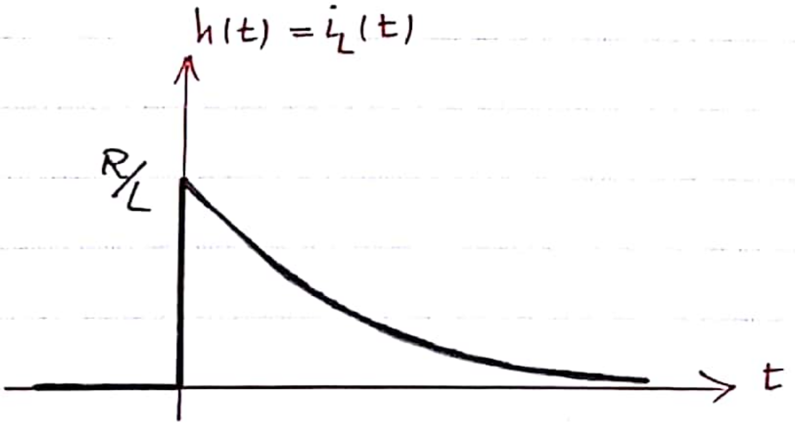
$$(1-e^{-t/\tau})\,\delta(t) = (1-e^{-0/\tau})\,\delta(t) = 0 \times \delta(t) = 0$$



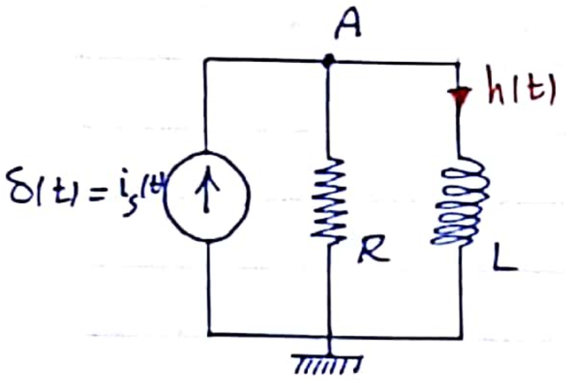
$$\boxed{h(t) = \frac{R}{L} e^{-t/\tau}, \quad t>0}$$

مشابه معادله شارژ سلف با جریان اولیه R/L

اگر ضربه شارژ سلف به مقدار مشخص بوده و بعد از زمان حضور ضربه این سلف با ثابت زمان مدار تخلیه می‌شود.



مثال روش ۳



$$KCL(A) \Rightarrow h(t) + \frac{v_A}{R} - i_s(t) = 0$$

$$h(t) + \frac{L}{R}\frac{d}{dt}h(t) - \delta(t) = 0$$

$$v_A = v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{dh(t)}{dt}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + R/L\, h(t) = R/L\, \delta(t)$$

حدس یا تشخیص جواب

$$h(t) = h(0^+)e^{-t/\tau}u(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\tau}h(0^+)e^{-t/\tau}u(t) + h(0^+)e^{-t/\tau}\delta(t)$$

$$-\frac{R}{L}h(0^+)e^{-t/\tau}u(t) + h(0^+)e^{-t/\tau}\delta(t)$$

در ضرب $\delta(t)$ با $t=0$ جایگذاری میشود

$$+\frac{R}{L}h(0^+)e^{-t/\tau}u(t) = R/L\,\delta(t)$$

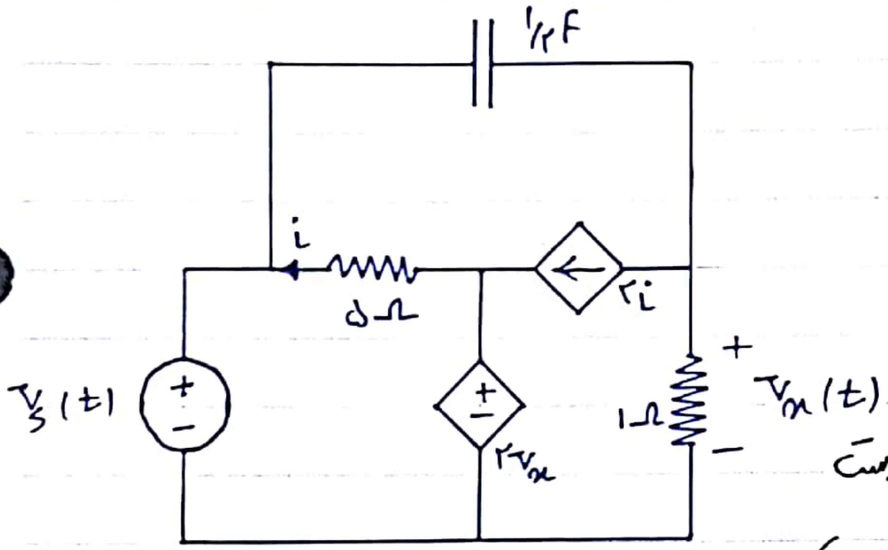
$$\Rightarrow h(0^+)e^{-0/\tau} = R/L \Rightarrow h(0^+) = R/L$$

$$h(t) = h(0^+)e^{-t/\tau}u(t) = R/L\, e^{-t/\tau}u(t)$$

Subject ۱۲۵
Date

مثال: پاسخ پله $v_x(t)$ و پاسخ حالت صفر به ورودی

$v_s(t) = 4[u(t) - u(t-2)]$ ، و همچنین پاسخ ضربه را برای مدار زیر بدست آورید.

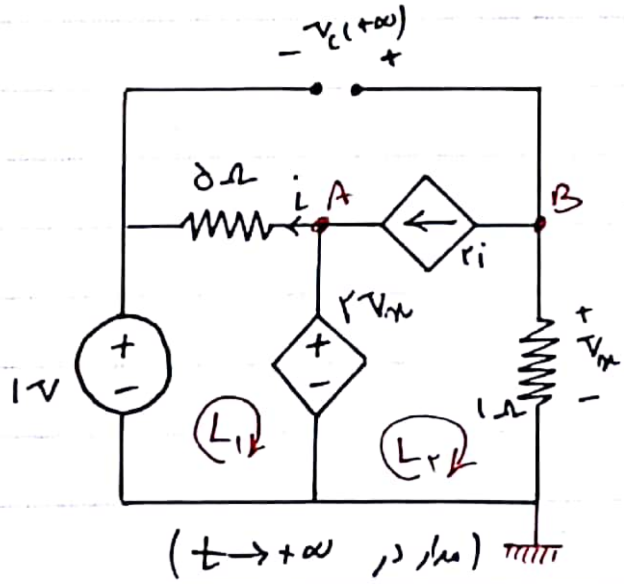


می‌توان پاسخ را برای ولتاژ خازن بدست آورده و از روی آن پاسخ $v_x(t)$ را محاسبه کرد.

محاسبه‌ی پاسخ پله :

مدار به صورت یک مدار مشترک است. حالت در صفر : $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$

حالت در $+\infty$:



$u(t) = v_s(t)$

$t > 0 \to v_s(t) = 1V$

$$KVL\ ① \Rightarrow -1 - 5i + 2V_x = 0$$

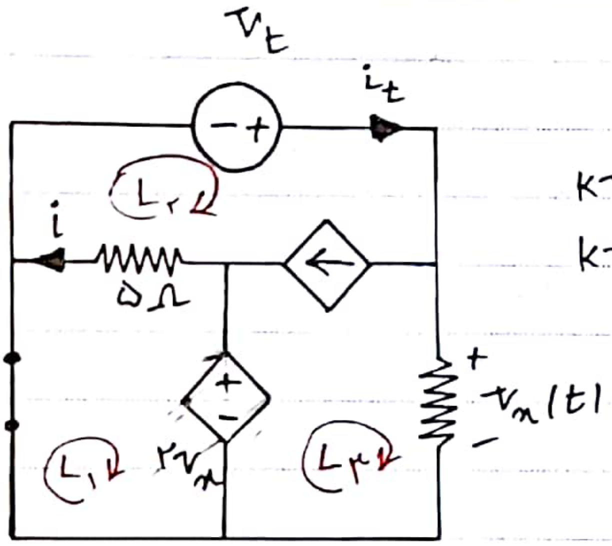
$$V_B = V_x = -2i \times 1\Omega = -2i \quad , \quad i = \frac{-V_x}{2}$$

$$\Rightarrow -1 - 5\left(-\frac{V_x}{2}\right) + 2V_x = 0 \Rightarrow V_x = \frac{2}{9}V$$

در نهایت داریم $\Rightarrow V_C(+\infty) = V_x - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}V$

محاسبه‌ی ثابت زمانی مدار $\tau = R_{eq}C$

به جای خازن، تحریک اعمال می‌کنیم :



$$KVL(L_1) \Rightarrow -5i + 2V_x = 0$$

$$KVL(L_2, L_3) \Rightarrow +5i - V_t + V_x - 2V_x = 0$$

$$\begin{cases} -5i + 2V_x = 0 \\ 5i - V_x = V_t \end{cases}$$

جریان منبع جریان بین مش‌های ۲ و ۳

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2i &= i_t - I_3 \\ I_3 \times 1 &= V_x \end{aligned}\right\} \rightarrow 2i = i_t - V_x$$

$$2i + V_x = i_t$$

Subject ۱۲۷
Date

$$-5i + 2v_x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 5i - v_x = v_t \\ 2i + v_x = i_t \end{array}\right\} \rightarrow 7i = v_t + i_t \rightarrow \left.\begin{array}{l} i = \dfrac{v_t + i_t}{7} \\ v_x = i_t - 2\left(\dfrac{v_t + i}{7}\right) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{7} v_t - \frac{5}{7} i_t + 2i_t - \frac{4}{7} v_t - \frac{4}{7} i_t = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{7} v_t + \frac{5}{7} i_t = 0$$

$$9v_t = 5i_t \rightarrow \frac{v_t}{i_t} = \frac{5}{9}\,\Omega = R_{eq}$$

$$\tau = R_{eq} C = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}\, s$$

پاسخ پله برای ولتاژ خازن $\Rightarrow v_c(t) = -3\left(1 - e^{-\frac{18}{5} t}\right) u(t)$

$$v_x(t) = v_c(t) + u(t)$$

$$v_c(t) = -3u(t) + 3e^{-\frac{18}{5} t} u(t) = S(t)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject ۱۲۸
Date

$$u(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow s(t)$$

$$۴[u(t)-u(t-۲)] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow ۴[s(t)-s(t-۲)]$$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow h(t)$$

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=-۲\delta(t)+۲e^{-۱۸/۵\,t}\,\delta(t)-\frac{۵۴}{۵}e^{-\frac{۱۸}{۵}t}u(t)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

فصل ۵

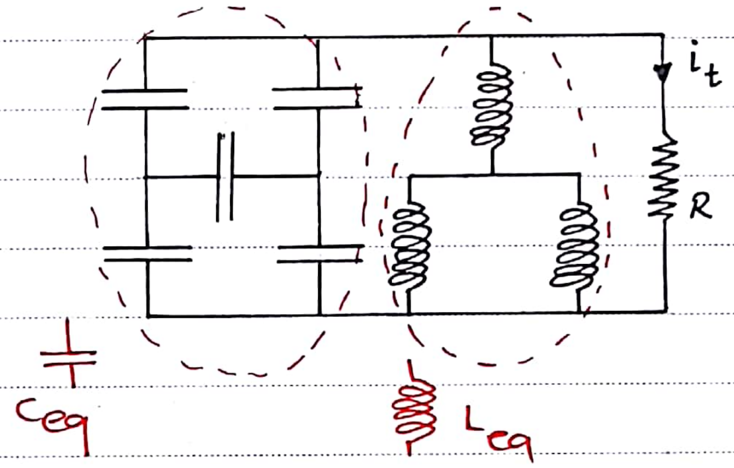
مدارهای مرتبه دوم

PAPCO

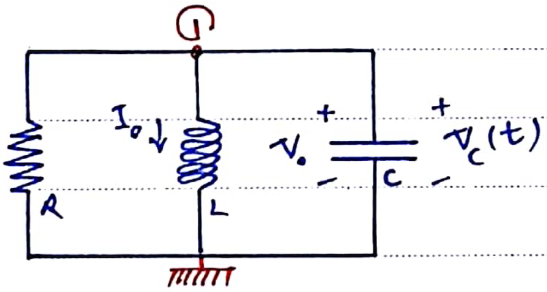
مدارهای مرتبه‌ی دوم

معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مدار از مرتبه‌ی دو است. معمولاً از جنس سلف و خازن، دو عدد وجود دارد یا دو عدد المان معادل از جنس سلف و خازن در مدار است.

مثال:



مدار RLC موازی، بدون ورودی



$$KCL① \Rightarrow \frac{v_c(t)}{R} + I_0 + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)\,dt + C\frac{dv(t)}{dt}$$

دیفرانسیل گیری $\Rightarrow \dfrac{dv_c(t)}{R\,dt} + \dfrac{1}{L}v_c(t) + C\dfrac{d^2v_c}{dt^2} = 0$

$$\frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{LC}v_c = 0$$

معادله‌ی مشخصه $\Rightarrow S^2 + \dfrac{1}{RC}S + \dfrac{1}{LC}$

فرم معادله‌ی مشخصه در مدار مرتبه‌ی ۲ $\qquad s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

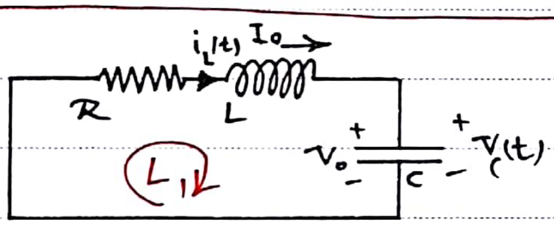
α : ضریب میرایی $\quad , \quad$ ω_0 : فرکانس طبیعی

در RLC موازی $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2RC} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

اگر R بزرگتر باشد، α (ضریب میرایی) کمتر خواهد شد.

ورودی در معادله‌ی مشخصه اثر ندارد و تنها در سمت دوم معادله‌ی دیفرانسیل اثرگذار است

مدار RLC سری، بدون ورودی



$$KVL(L_1) \to R i_L(t) + V_L(t) + V_C(t) = 0$$

$$R i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\,dt = 0$$

دیفرانسیل گیری $\Rightarrow$
$$R \frac{di_L}{dt} + L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{C} i_L(t) = 0$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt} + \frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = 0$$

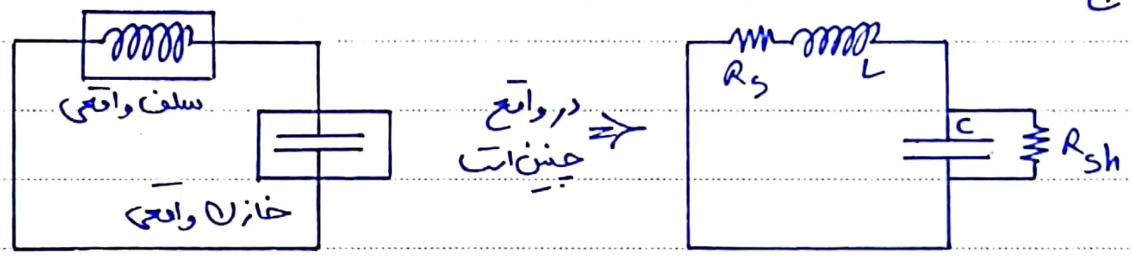
$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

فرم کلی معادله‌ی مشخصه $\Rightarrow s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

در RLC سری $\Rightarrow \alpha = \frac{R}{2L} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

هرچه R کوچکتر باشد، α (ضریب میرایی) کوچکتر است.

مدارهای واقعی، همیشه مقداری مقاومت دارند که باعث میرایی می‌شوند. به همین علت در واقعیت هیچ مداری در $t=+\infty$ کار نمی‌کند.



حالت‌های مختلف پاسخ همگن در معادلات درجه ۲

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0$$

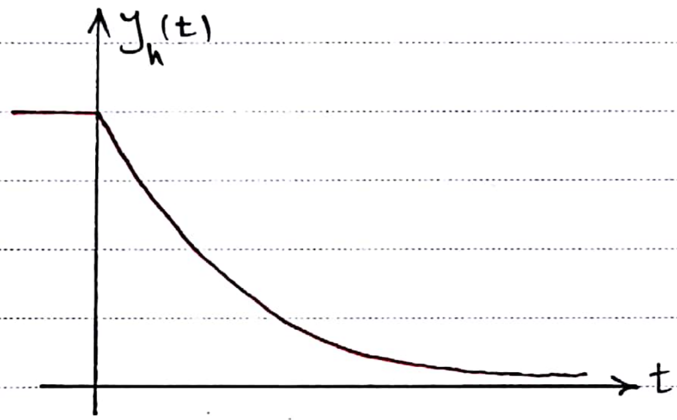
$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

حالت ۱: معادله‌ی مشخصه جواب های حقیقی ومتمایز داشته باشد

$\alpha > \omega_0 \rightarrow S_1, S_2$: حقیقی و منفی

$$y_h(t) = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t}$$

این حالت را میرایی شدید می‌گوییم



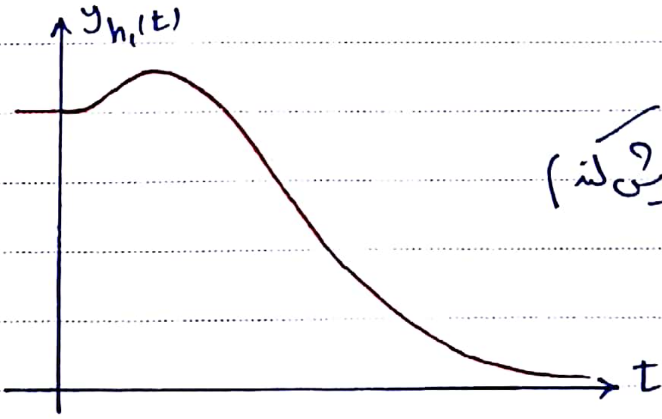
(اثر ورودی در نظر گرفته نشده است)

حالت ۲: معادله‌ی مشخصه پاسخ تکراری داشته باشد

$\alpha = \omega_0 \rightarrow S_1 = S_2 = -\alpha$

$$y_{h_1}(t) = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t e^{-\alpha t}$$

این حالت را میرایی بحرانی می‌نامند



(وجود ضریب t می‌تواند در ابتدا، ایجاد افزایش کند)

حالت ۳: معادله‌ی مشخصه دو جواب مزدوج دارد.

$$\alpha < \omega_0 \rightarrow S_1 = -\alpha + i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\ , \quad i = \sqrt{-1}$$

$$S_2 = -\alpha - i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

به عنوان فرکانس زاویه‌ای نوسانات میرا، تعریف شده است

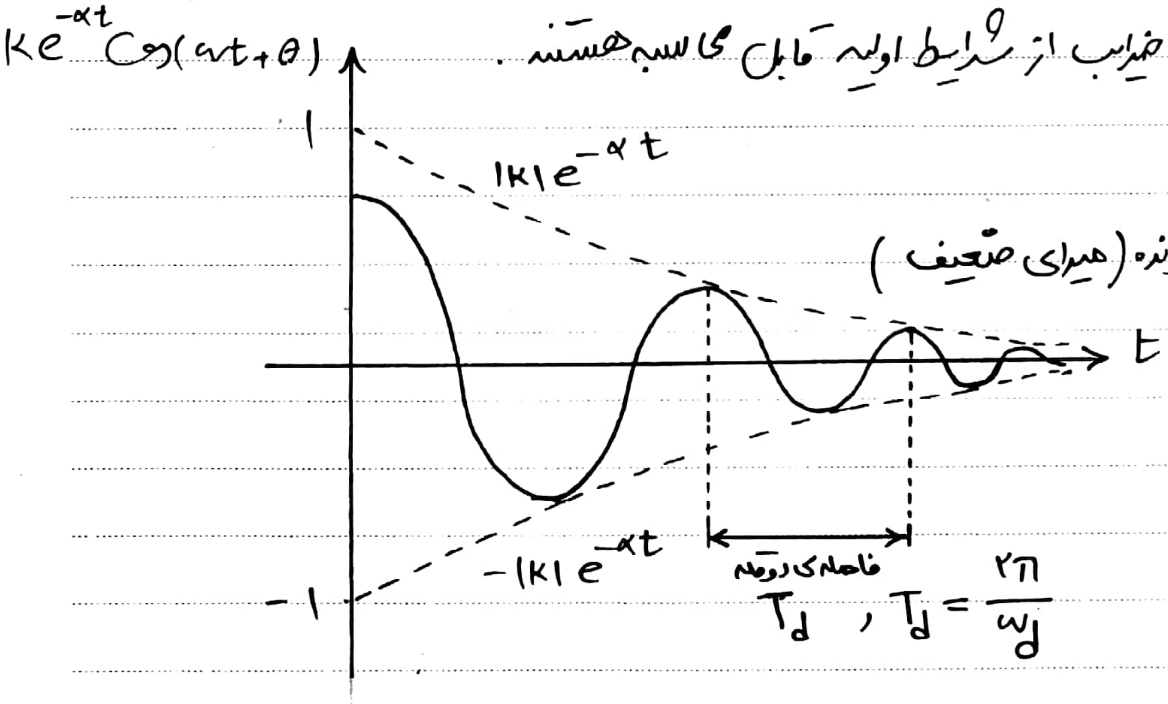
$$\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\ \frac{rad}{sec}$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}\ Hz$$

$$y_h(t) = K_1 e^{-(\alpha + i\omega_d)t} + K_2 e^{-(\alpha - i\omega_d)t}$$

$$= K e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) = K_3 e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) + K_4 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t)$$

توجه: در تمام حالات ضرایب از شرایط اولیه قابل محاسبه هستند.



حالت نوسانی میرا شونده (میرای ضعیف)

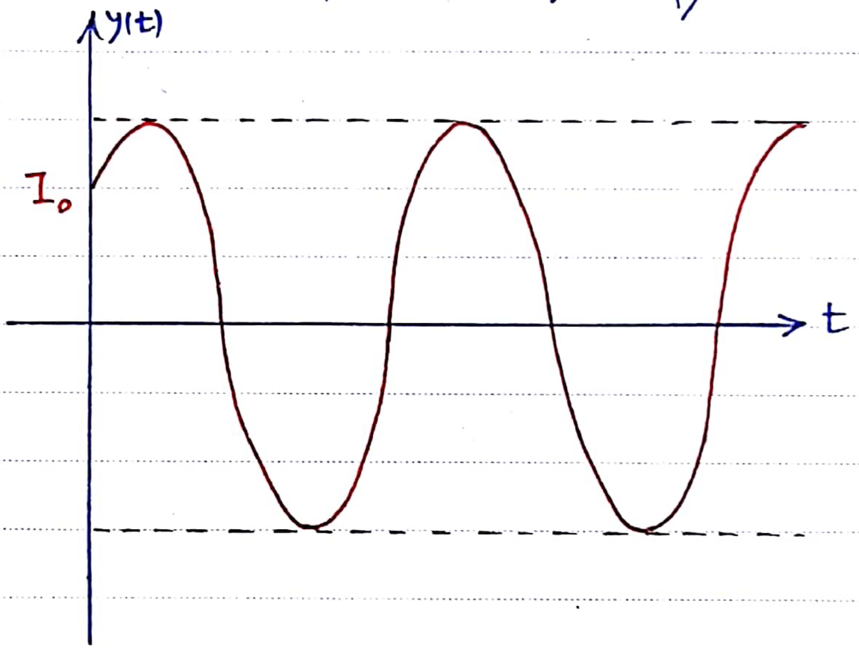
$$T_d\ , \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

حالت ۴ (نوسانی نامیرا)

$$\alpha = 0 \longrightarrow S_1 = i\omega_0 \,,\; S_2 = -i\omega_0$$

$$y_h(t) = K\cos(\omega_0 t + \theta)$$

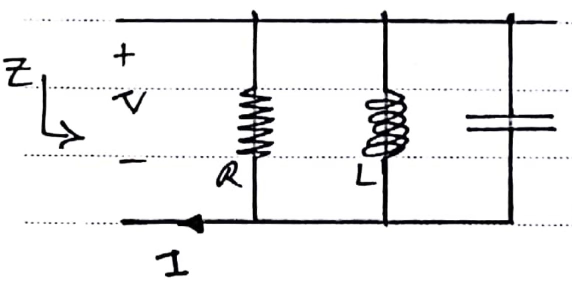
$$= K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t)$$



Q ضریب کیفیت در مدار تشدید (Quality Factor)

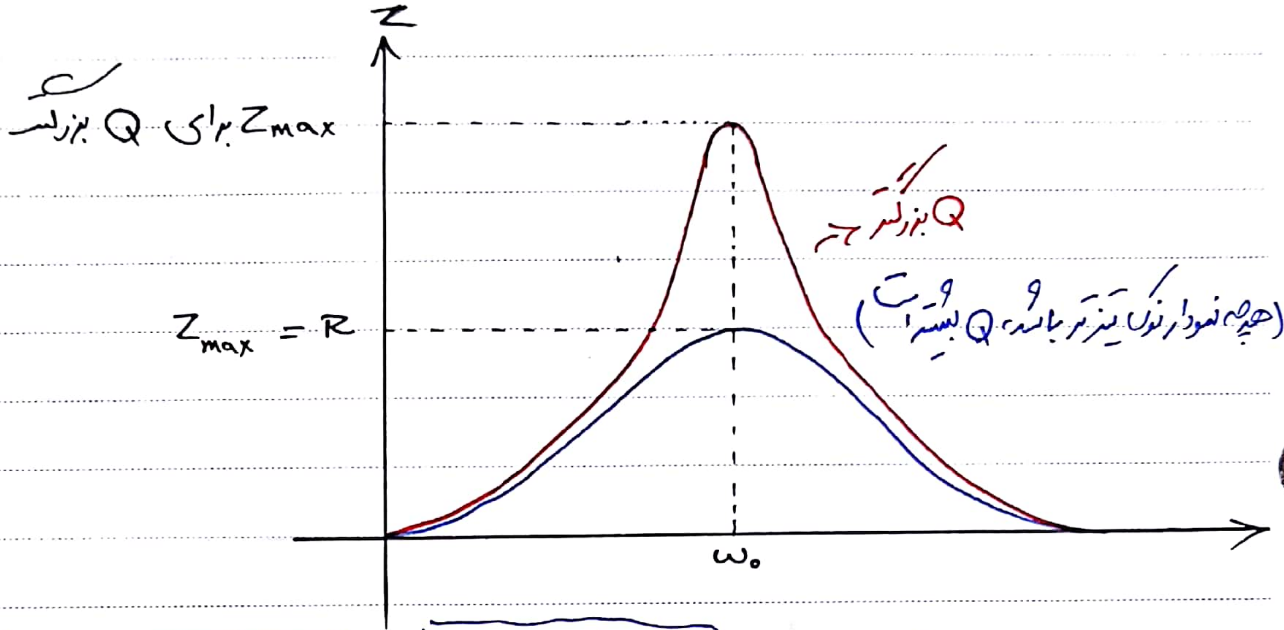
$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

مدار تشدید، یک مدار فرکانس گزین است



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

مدار RLC موازی در فرکانس تشدید بیشترین امپدانس را داراست : $Z = R$

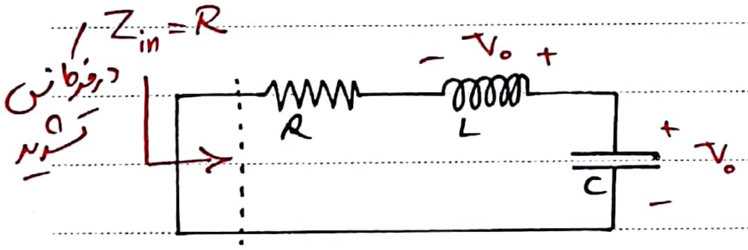


$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \xrightarrow{\text{RLC موازی}} \boxed{\alpha = \frac{1}{2RC}} \rightarrow Q = RC\omega_0$$

برای RLC موازی هرچه R بزرگتر باشد، Q بزرگتر است

در فرکانس تشدید، سلف و خازن طوری عمل می‌کنند که همدیگر را خنثی می‌کنند و مقاومت بیشترین مقدار است.

برای RLC سری داریم:



$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0}{R/L} = \frac{L\omega_0}{R}$$

هرچه R کوچکتر باشد، Q بزرگتر است

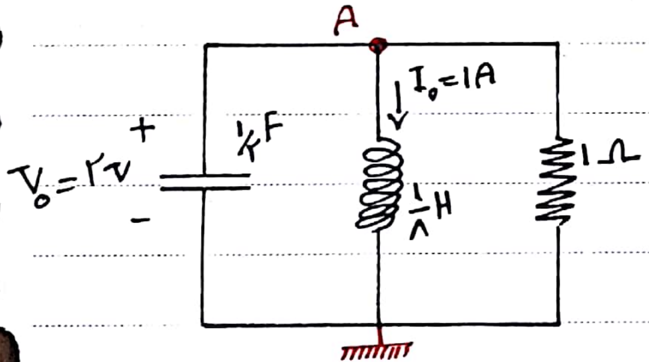
می‌توان اینطور نوشت: $Q = 2\pi \times \dfrac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در یک سیکل}}$

$= \omega_0 \times \dfrac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{توان تلف شده در مقاومت}}$

حالت‌های Q

- $Q < \frac{1}{2}$ $\quad \alpha > \omega_0 \rightarrow$ میرایی شدید
- $Q = \frac{1}{2}$ $\quad \alpha = \omega_0 \rightarrow$ میرایی بحرانی
- $Q > \frac{1}{2}$ $\quad \alpha < \omega_0 \rightarrow$ میرایی ضعیف
- Q: بزرگ باشد $\quad \alpha \ll \omega_0 \rightarrow$ نامیرا

مثال: در مدار زیر $v_c(t)$ را بدست آورده و Q مدار را محاسبه کنید



موازی RLC $\rightarrow s^2 + \frac{1}{2RC}s + \frac{1}{LC} = 0$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\times 1\times 1/2} = 1 \quad , \quad \omega_0 = 4$$

$\Rightarrow \alpha < \omega_0 \rightarrow$ پس نوسانی میراست

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$$

$$v_c(t) = K_1 e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + K_2 e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

$$v_c(t) = K_1 e^{-t}\cos(\sqrt{15}t) + K_2 e^{-t}\sin(\sqrt{15}t)$$

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 2V \to t=0 \to 2 = K_1\times 1 + K_2\times 0$$

$$\to \boxed{K_1 = 2}$$

بدست آوردن K_2 :

$$KCL\ (A) \to i_L(t) + \frac{v_c(t)}{R} + C\frac{dv_c(t)}{dt} = 0$$

$$t=0 \to I_0 + \frac{v_0}{R} + 1/2\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

$$1+2+\frac{1}{2}\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = -6$$

پس داریم $\Rightarrow v_c(t) = 2e^{-t}\cos(\sqrt{15}t) + K_2 e^{-t}\sin(\sqrt{15}t)$

$$\frac{dv_c}{dt} = -2e^{-t}\cos\sqrt{15}t - 2\sqrt{15}e^{-t}\sin(\sqrt{15}t) - K_2 e^{-t}\sin\sqrt{15}t + \sqrt{15}K_2 e^{-t}\cos\sqrt{15}t$$

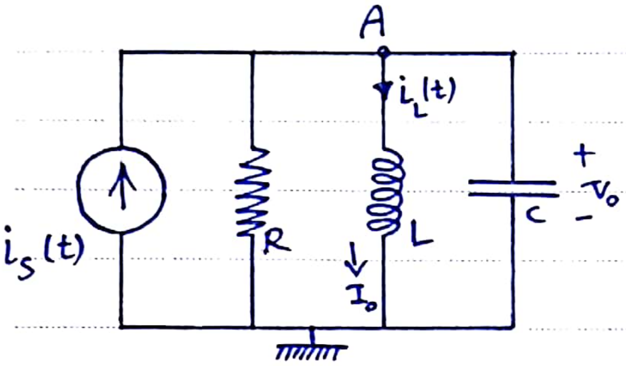
$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = -2+\sqrt{15}K_2 = -6 \to K_2 = -\frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{4}{2} = 2$$

Subject ۱۳۸

Date ۹۷,۲,۱۱ سه‌شنبه ۰۲

پاسخ پله مدار مرتبه‌ی دوم



مدار حالت صفر با ورودی پله واحد :

$$\left.\begin{array}{l} i_s(t) = u(t) \\ \begin{cases} I_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \leftarrow \text{پاسخ پله}$$

$$\text{KCL}\ (A) \rightarrow i_s(t) + \frac{v_C}{R} + i_L(t) + i_C = 0 \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt} \qquad v_C = v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$\Rightarrow -u(t) + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L + C\frac{d}{dt}\left(L\frac{di_L}{dt}\right) = 0$$

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = u(t) \Rightarrow \times\frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{u(t)}{LC}}$$

معادله‌ی دیفرانسیل غیرهمگن

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \rightarrow s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Subject ۱۳۹
Date

حالت های مختلف پاسخ همگن
- میرایی شدید
- میرایی بحرانی
- میرایی ضعیف (نوسانی میرا) $\rightarrow y_h = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$
- نامیرا
- ناپایدار $\alpha < 0$

پاسخ خصوصی :

از طرف دوم معادله نیز دیفرانسیل می گیریم

$$y_p(t) = K u(t)$$

$$i_{L_p}(t) = K_1 u(t) \xrightarrow[t>0 \text{ در}]{\text{در معادله می گذاریم}} u(t) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{1}{LC} \rightarrow K_1 = 1$$

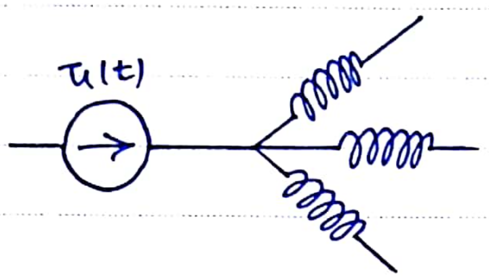
با فرض اینکه پاسخ همگن، نوسانی میراست :

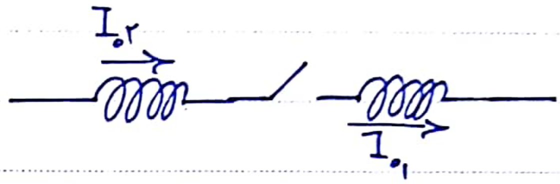
$$t>0 \rightarrow i_L(t) = i_{L_h}(t) + i_{L_p} = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d + \theta) + 1$$

$$\boxed{\underset{t\to+\infty}{i_L(t) \longrightarrow 1}}$$

جریان سلف در این حالت پیوسته است $i_L(0^-) = i_L(0^+)$

جریان سلف می‌تواند ناپیوسته باشد. به اینصورت که:





سلف‌ها خیلی سریع به هم متصل بشوند

یا

سلف‌ها به اینصورت به هم متصل باشند و ورودی به صورت ضربه باشد.

چون مدار حالت صفر بوده و جریان پیوسته است $\Rightarrow i_L(0^+)=0 \Rightarrow K_1 e^{-\alpha(0)}\cos(\omega_d(0)+\theta)+1=0$

$\boxed{K\cos\theta=-1}$ معادله (I)

$$\text{KCL (A)} \Rightarrow -u(t)+\frac{v_C}{R}+C\frac{dv_C}{dt}+i_L=0$$

$$t>0 \quad v_C(0^-)=v_C(0^+)=0$$

$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=0$$

$$-1+\frac{0}{R}+C\frac{dv_C}{dt}+0=0 \Rightarrow \frac{dv_C}{dt}\Big|_{t=0^+}=\frac{1}{C}$$

$$v_C=v_L=L\frac{di_L}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2}\Big|_{t=0^+}=\frac{1}{LC}$$

$$i_L(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(w_d t+\theta)+1 \,,\quad t>0$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\alpha K e^{-\alpha t}\cos(w_d t+\theta) - Kw_d e^{-\alpha t}\sin(w_d t+\theta)$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} = \alpha^2 K e^{-\alpha t}\cos(w_d t+\theta) + \alpha K w_d e^{-\alpha t}\sin(w_d t+\theta)$$

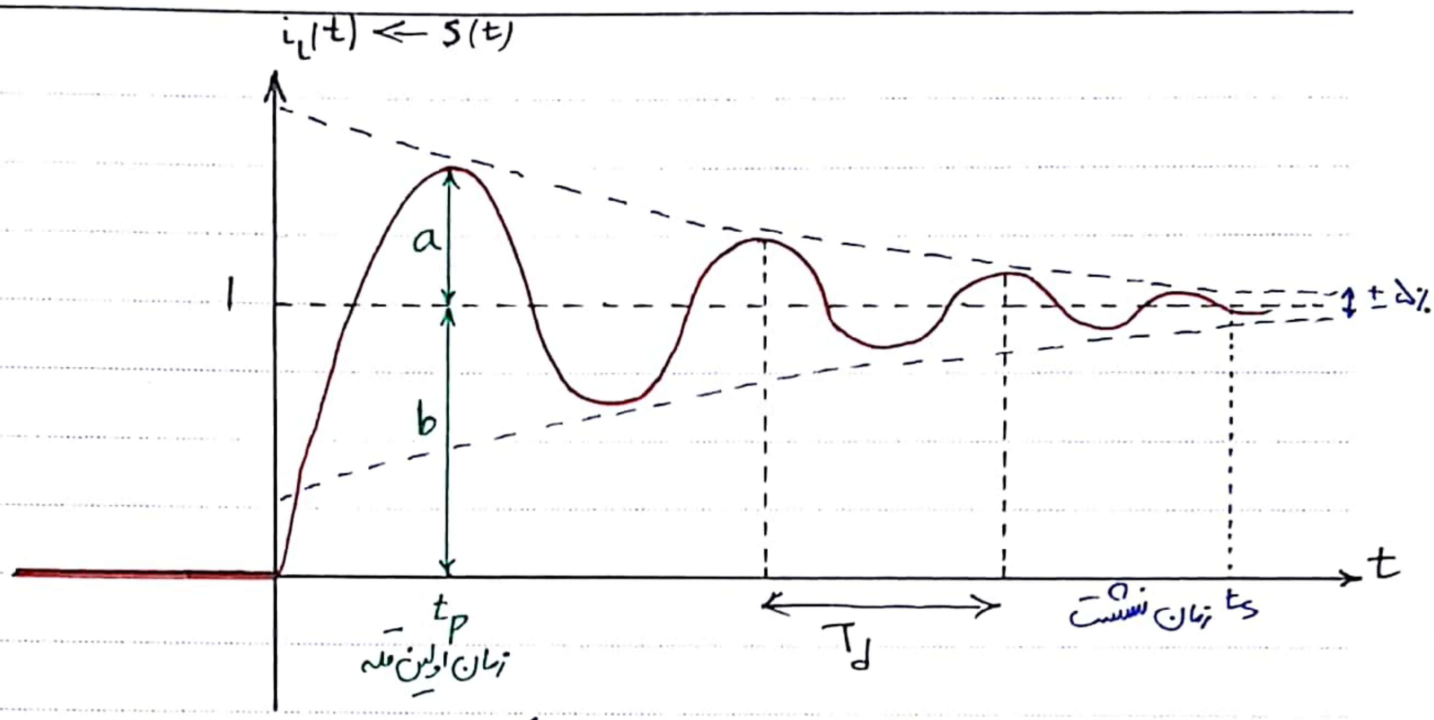
$$+ w_d K\alpha e^{-\alpha t}\sin(w_d t+\theta) - w_d^2 K e^{-\alpha t}\cos(w_d t+\theta)$$

$$\left.\frac{d^2 i}{dt^2}\right|_{t=0^+} = \alpha^2 K\cos\theta + 2\alpha K w_d \sin\theta - w_d^2 K\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{1}{LC} = \alpha^2 + 2\alpha K w_d \sin\theta - w_d}$$ معادله‌ی II

$\left.\begin{array}{l}\text{معادله‌ی I} \\ \text{معادله‌ی II}\end{array}\right\} \rightarrow \underset{\text{بدست می‌آیند}}{K,\theta}$

توجه: در تغییرات پله (یک مرتبه) در لحظه‌ی آغازین، برای مدار حالت صفر، خازن می‌تواند اتصال کوتاه و سلف مشابه مدار باز عمل کند.



حالت نمودار بعد از $t=0$ ، بستگی به یکی از چهار حالت دارد که در اینجا، نوسانی میرا است.

$$i_L(t) = K\underbrace{e^{-\alpha t}}_{\text{ضریب میرایی}}\cos(\omega_d t + \theta) + \underbrace{1}_{}$$

ضریب میرایی

ثابتی است که قسمت میرای به آن میل می کند؟

$$\text{درصد بالازدگی} = \frac{a}{b} \times 100\%$$

overshoot

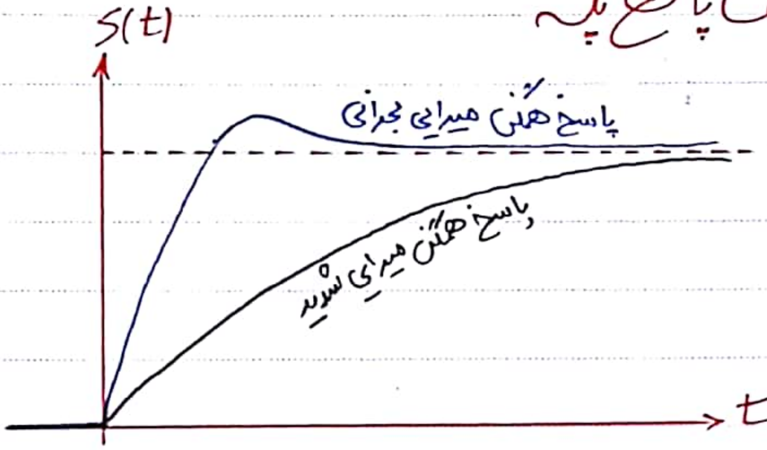
t_s (زمان نشست) : زمانی که خروجی با تقریب بالایی به مقدار نهایی رسیده است

که در اینجا ٪۵± است.

به عنوان تکلیف، میزان بالازدگی را تحقیق کنید و سعی کنید که محاسبه کنید.

فرمول زمان نشست را نیز تعیین کنید.

حالت های مختلف پاسخ پله



پاسخ ضربه مدار مرتبه دوم

روش متداول، محاسبه ی پاسخ پله و مشتق گیری از آن است

فضای حالت

معادلات حالت : معادلاتی هستند که بر حسب حالات و مشتق یکی از حالت ها بیان می شوند

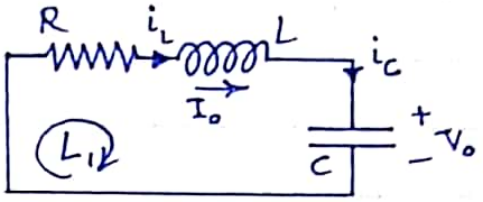
(منظور از حالت، جریان سلف و ولتاژ خازن است)

مدار مرتبه ۲ مفروض است که یک سلف و یک خازن دارد.

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = K_1 i_L + K_2 V_C + \text{اثر ورودی ها} \\ \dfrac{dV_C}{dt} = K_3 i_L + K_4 V_C + \text{اثر ورودی ها} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ معادلاتی که به این فرم باشند (مدار خطی)

معادلات حالت در مدار خطی



$$i_L = i_C = C\frac{dv_C}{dt} \rightarrow \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L$$

$$KVL\,(L_1) \rightarrow R i_L + v_L + v_C = 0$$

$$R i_L + L\frac{di_L}{dt} + v_C = 0$$

$$\boxed{\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} v_C}$$

در این مدار مرتبه دوم، به جای معادله مرتبه‌ی ۲، با استفاده از حالات، دو معادله‌ی درجه ۱ ایجاد شده است.

به شکل ماتریسی

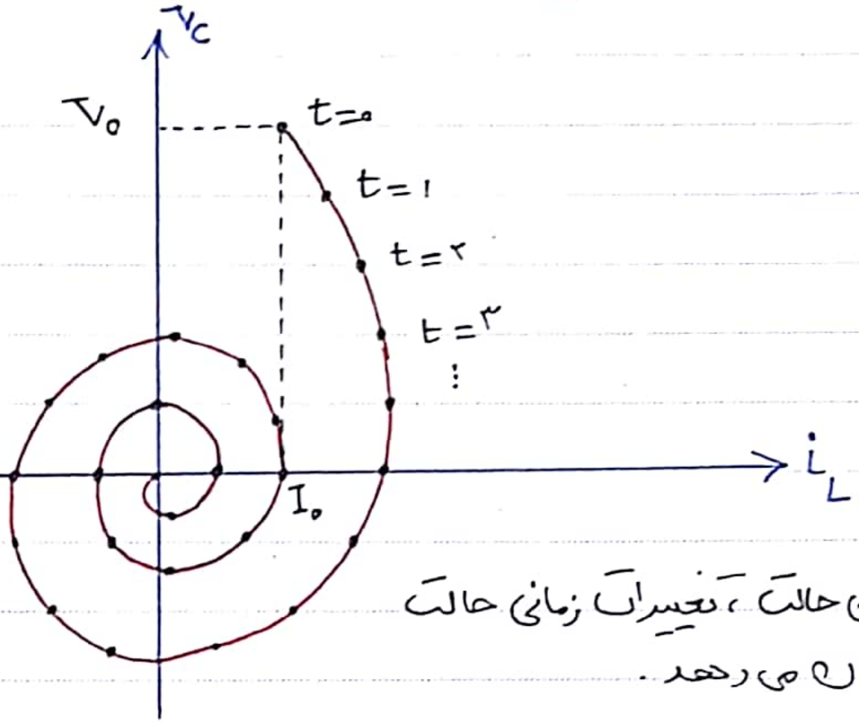
$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$ فرم ماتریسی معادله‌ی حالت

$$X = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$ X به عنوان بردار حالت در اینجاست:

$$\longrightarrow \dot{X} = \underset{\text{ماتریس حالت}}{A}X + \underbrace{bw}_{\text{اثر ورودی‌ها}}$$

رسم فضای حالت

فضای حالت نوسانی میرا



فضای حالت، تغییرات زمانی حالت را نشان می دهد.

حل معادله حالت، بوسیله‌ی سیستم محاسبه

* توجه: معادله‌ی حالت، مدارهای غیرخطی را نیز حل می کند.

در حالت خطی: $\dot{X} = AX + bw$

مدار خطی و حالت صفر: $\dot{X} = AX$ ، بردار حالت در زمان : $X(0)$
(صفر از شرایط اولیه مدار)

در مدار غیرخطی $\dot{X} = f(X)$ ، حالت در زمان Δt : $X(\Delta t)$
(Δt گام کوچکی است)

درنتیجه $\rightarrow X(\Delta t) = X(0) + f(X)\Delta t$ ، $f(X) = dX/dt$

پس داریم $\rightarrow X(2\Delta t) = X(\Delta) + f(X(\Delta t))\Delta t$

⋮

توجه: در مدارهای غیرخطی، حالت مدار را بار خازن‌ها و شار سلف‌ها در نظر می‌گیریم.

$$X = \begin{bmatrix} q \\ \varphi \end{bmatrix}$$

برای خازن خطی: $q = CV$

برای خازن غیرخطی: $q = K\sqrt{V}$

برای سلف خطی: $\varphi = Li$

برای سلف غیرخطی: $\varphi = K i^2 + K_2 i$

$$i = K_1\sqrt{\varphi} + K_2\varphi$$

Subject ۱٤۷
Date ۹۶/۲/۱۶ یکشنبه

استفاده از اپراتور (نماد) D و $\frac{1}{D}$ در تشکیل معادله دیفرانسیل مدار

$$D \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d}{dt} \qquad v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = LDi_L$$

$$\frac{1}{D} \longrightarrow \int_0^t \qquad \frac{v_L}{i_L} = LD =$$ معادل مقاومت سلف

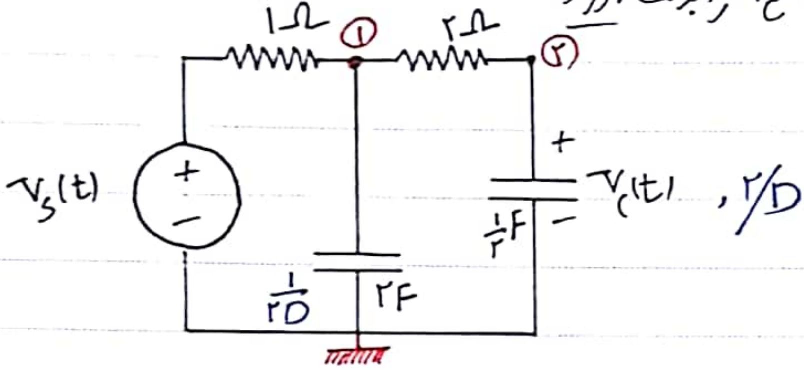
$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = CDv_C \rightarrow \frac{i_C}{v_C} = CD$$ معادل هدایت یک خازن

$$v_C = v_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt \rightarrow v_C = v_0 + \frac{1}{CD} i_C$$

توجه: در معادلات دیفرانسیل، سمت دوم شرایط اولیه ظاهر نمی‌شوند. شرایط اولیه در حل معادلات و برای بدست آوردن جواب (ثابت‌ها) نقش دارند.

اگر هدف بدست آوردن معادله دیفرانسیل یک مدار است، می‌توان به جای مقاومت خازن $\frac{1}{CD}$ قرار داد.

مثال: در مدار زیر معادله‌ی دیفرانسیل $V_C(t)$ را بدست آورید



$$KVL ① \rightarrow \frac{V_1 - V_s}{1} + 2DV_1 + \frac{V_1 - V_2}{2} = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{3}{2} + 2D\right)V_1 - V_s - \frac{V_2}{2/D} = 0}$$ ① معادله‌ی

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{D}{2}\right)V_2 = \frac{V_1}{2} \rightarrow V_1 = (1+D)V_2 \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم ①}]{\text{در معادله‌ی}}$$

$$\left(\frac{3}{2} + 2D\right)(1+D)V_2 - \frac{V_2}{2} = V_s$$

$$\frac{3}{2}V_2 + \frac{3}{2}DV_2 + 2DV_2 + 2D^2V_2 - \frac{V_2}{2} = V_s$$

$$2D^2V_2 + \frac{7}{2}DV_2 + V_2 = V_s$$

$$\boxed{2\frac{d^2}{dt^2}V_{C_2}(t) + \frac{7}{2}\frac{d}{dt}V_{C_2}(t) + V_{C_2}(t) = V_s(t)}$$

معادله‌ی دیفرانسیل

تمرین: به جای خازن‌ها، سلف جایگزین کنید و معادله‌ی دیفرانسیل را بدست آورید

Subject
Date

فصل ۶

مبانی مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان

مبانی مدارهای خطی

تغییرناپذیر با زمان

PAPCO

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI)

برخی از ویژگی ها را پیش از این دیده و استفاده کردیم :

۱ـ خطی بودن پاسخ مدار LTI و حالت صفر

ورودی	مدار LTI و حالت صفر	خروجی
$x_1(t)$	→	$y_1(t)$
$Kx_1(t)$	→	$Ky_1(t)$
$x_2(t)$	→	$y_2(t)$
$K_1x_1(t)+K_2x_2(t)$	→	$K_1y_1(t)+K_2y_2(t)$

۲ـ خاصیت جابه جایی زمانی (به علت تغییرناپذیر بودن با زمان)

ورودی	مدار LTI و حالت صفر در زمان اعمال ورودی	پاسخ
$x(t)$	→	$y(t)$
$x(t-t_0)$	→	$y(t-t_0)$
$x(t)-x(t-t_0)$	→	$y(t)-y(t-t_0)$
$x_2(t)=\dfrac{x(t)-x(t-t_0)}{t_0}$	→	$y_2(t)=\dfrac{y(t)-y(t-t_0)}{t_0}$
$\dfrac{dx}{dt}$	→	dy/dt

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \qquad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

۳- جمع آثار: اگر مدار تحت اثر چند ورودی باشد، پاسخ را می‌توان از جمع پاسخ‌های ناشی از تک تک ورودی‌ها با خنثی کردن سایرین، بدست آورد.

٤- خاصیت انتگرال کانولوشن

با داشتن پاسخ حالت صفر به ورودی خاص (ورودی ضربه) می‌توان پاسخ مدار به هر ورودی دلخواه را بدست آورد.

$\delta(t)$	input →	مدار LTI و حالت صفر	→ output $h(t)$
$x(t)$			$y(t) = x(t) * h(t)$

$*$ ← کانولوشن

کانولوشن

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(t')\, x_2(t-t')\, dt'$$

کانولوشن، جابجایی پذیر است

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) = \int_0^t x_1(t')\, x_1(t-t')\, dt'$$

توجه: کانولوشن در حوزه‌ی لاپلاس، تبدیل ضرب می‌شود

حوزه‌ی زمان	حوزه‌ی لاپلاس
$y(t) = x(t) * h(t)$	$Y(s) = X(s)\, H(s)$

استفاده از خواص مدارهای LTI در محاسبه‌ی پاسخ

۱_ محاسبه‌ی پاسخ با استفاده از ارتباط ورودی ها

مثال: پاسخ حالت صفر یک مدار LTI به ورودی $x(t)=e^{-2t}u(t)$ به صورت $y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$ بوده است. پاسخ ضربه را برای این مدار بدست آورید.

راه‌حل: بدست آوردن ارتباط ورودی جدید با ورودی با پاسخ مشخص است.

$$\frac{dx(t)}{dt}=\underbrace{-2e^{-2t}u(t)}_{x(t)}+e^{-2t}\delta(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=e^{-2t}\underbrace{\delta(t)}=1\times\delta(t)$$

فقط حوالی $\boxed{t=0}$ صفر مقدار دارد

$$x(t)=e^{-2t}u(t) \longrightarrow \boxed{\text{مدار LTI و حالت صفر}} \longrightarrow y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

$$\delta(t)=\frac{dx}{dt}+2x \qquad\qquad h(t)=\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)$$

$$h(t)=(-e^{-t}+2e^{-2t})u(t)+(e^{-t}-e^{-2t})\delta(t)+2(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

$$=e^{-t}u(t)+(e^{-t}-e^{-2t})\underbrace{\delta(t)}=e^{-t}u(t)+0\times\delta(t)=e^{-t}u(t)$$

حوالی صفر $\boxed{t=0}$ مقدار دارد

۲_ محاسبه‌ی پاسخ ضربه با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل

در مدار LTI فرم معادله‌ی دیفرانسیل، خطی و به صورت زیر است :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \dots + b_m w$$

w ورودی مدار است و ضرایب a_0 تا a_n و b_0 تا b_m، همگی ثابت‌اند.

پاسخ ضربه یعنی $w(t) = \delta(t)$ در مدار حالت صفر

حالت الف) $n > m$ مرتبه‌ی مشتق پاسخ بیش از مرتبه‌ی مشتق ورودی باشد.

$y(t) = y_h(t)$ دقیقاً هم شکل

معادله مشخصه $\rightarrow s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{cases}$

اگر جواب ها متمایز باشند :

$$y(t) = (k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \dots)\, u(t)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t} \right) u(t)$$

اگر $s_2 = s_3 = s_4$ و سایرین مختلف باشند

$$y(t) = (k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + k_2' t e^{s_2 t} + k_2'' t^2 e^{s_2 t} + k_5 e^{s_5 t} + \dots)\, u(t)$$

درحالت ریشه های مزدوج هم، فرم همگن را می توان مطابق قبل نوشت :

$$\begin{cases} S_1 = -\alpha + i\omega_d \\ S_2 = -\alpha - i\omega_d \end{cases} \rightarrow Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$$

با جاگذاری فرم جواب در معادله دیفرانسیل و معادل گرفتن ضرایب $\delta(t)$ و $\delta'(t)$ و ... در دو سمت معادله ضرایب K_1 و K_2 و ... بدست خواهند آمد.

مثال: پاسخ ضربه را برای مداری با معادله دیفرانسیل زیر بدست آورید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 2\frac{dw}{dt} + w$$

ورودی : $w(t)$

پاسخ : $y(t)$

$n = 2 \,,\, m = 1 \rightarrow n > m$

معادله ی مشخصه $s^2 + 4s + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} S_1 = -1 \\ S_2 = -3 \end{cases}$

$$y(t) = (K_1 e^{-t} + K_2 e^{-3t})u(t)$$

پاسخ ضربه $\rightarrow w(t) = \delta(t)$

$$\frac{dy(t)}{dt} = (-K_1 e^{-t} - 3K_2 e^{-3t})u(t) + (K_1 e^{-t} + K_2 e^{-3t})\delta(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = (K_1e^{-t}+9K_2e^{-3t})u(t) - (K_1e^{-t}+3K_2e^{-3t})\delta(t) + (K_1e^{-t}+K_2e^{-3t})\delta'(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y(t) = 0\times u(t) + (K_1e^{-t}+K_2e^{-3t})\delta'(t) + (2K_1e^{-t}-2K_2e^{-3t})\delta(t)$$

$$= \boxed{2\delta'(t)+\delta(t)}$$ سمت دوم معادله

ضریب $\delta'(t)$ در دو طرف $\rightarrow (K_1e^{-t}+K_2e^{-3t})\delta'(t) = 2\delta'(t)$

$$(K_1+K_2)\delta'(t) = 2\delta'(t) \rightarrow K_1+K_2=2$$

ضریب $\delta(t)$ در دو طرف $\rightarrow (2K_1e^{-t}-2K_2e^{-3t})\delta(t) = \delta(t)$

$$2K_1-2K_2=1 \leftarrow \boxed{t=0}$$

$$\begin{cases} K_1+K_2=2 \\ K_1-K_2=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow K_1=\frac{5}{4}, \quad K_2=\frac{3}{4}$$

$$\rightarrow h(t) = \left(\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{3}{4}e^{-3t}\right)u(t)$$

Subject ۱۶۲

Date

توجه : فقط در سرحلهی آخر که ضرایب دو طرف را معادل می گیریم، مجاز هستیم که برای ضرایب $\delta(t)$ و $\delta'(t)$ و ... ، $t=0$ را جایگذین کنیم.

حالت ب) $m=n$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\dots+a_n y(t)=b_0\frac{d^m w}{dt^m}+\dots+b_m w$$

$$y(t)=\left(\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t}\right)u(t)+b_0\,\delta(t)$$

در حالت متمایز بودن ریشه های معادله مشخصه

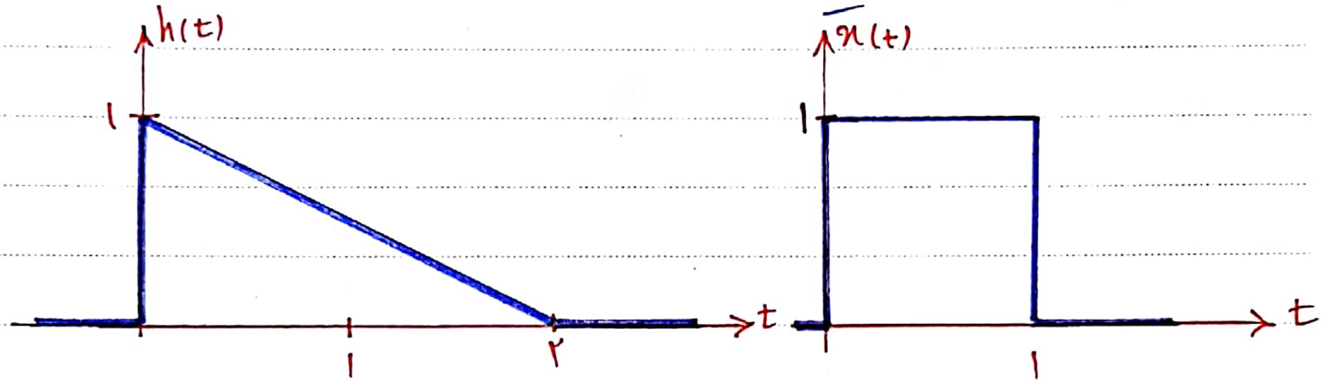
پاسخ ضربه دارای ضربه و مشتقات ضربه تا مرتبه $m-n$ می توانند باشد.

$$y(t)=y_n(t)\ \text{فرم}+C_1\delta(t)+C_2\delta'(t)+\dots+C_n\delta^{m-n}(t)$$

Subject ۱۵۶
Date سه شنبه ۹۷/۲/۱۸

مثال از کاربرد کانولوشن در محاسبه ی پاسخ

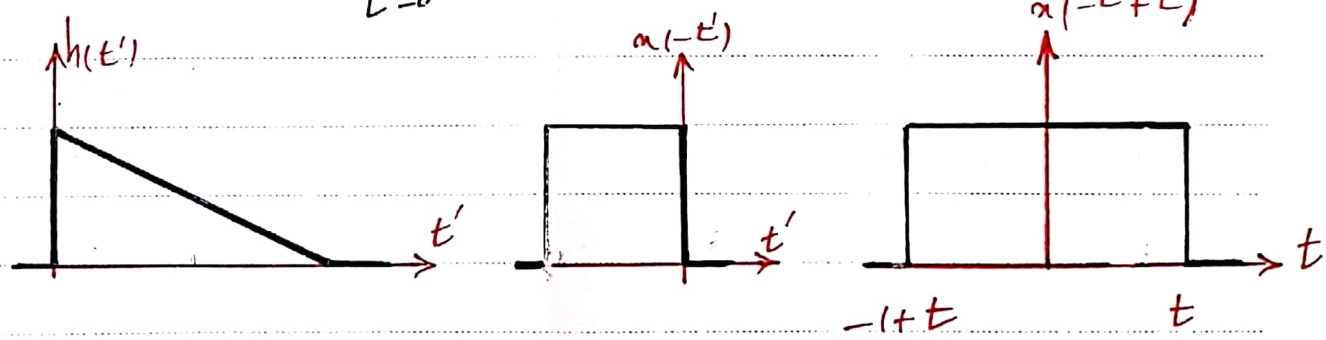
در یک مدار ILT و حالت صفر، پاسخ ضربه به صورت $h(t)$ نشان داده شده است. پاسخ به ورودی $x(t)$ نشان داده شده را بدست آورید



روش ترسیمی:

پاسخ به $x(t)$: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{t'=0}^{t} x(t')\,h(t-t')\,dt'$

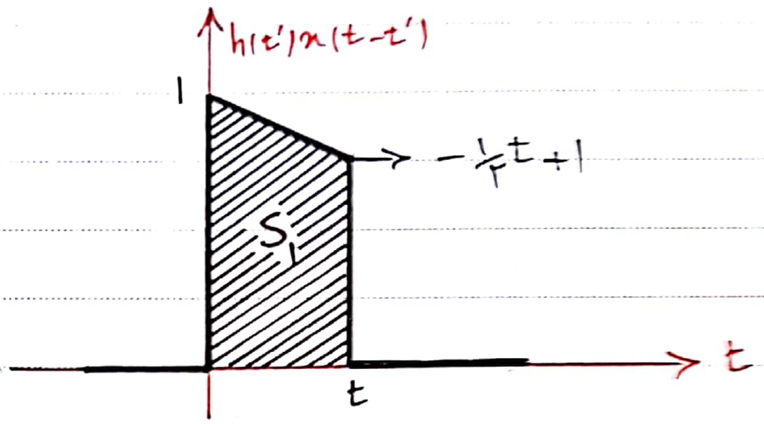
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{t'=0}^{t} h(t')\,x(t-t')\,dt'$$



$\boxed{0 < t < 1}$

$t<0 \rightarrow h(t')x(t-t')=0 \rightarrow y(t)=0$

$0<t<1 \rightarrow$

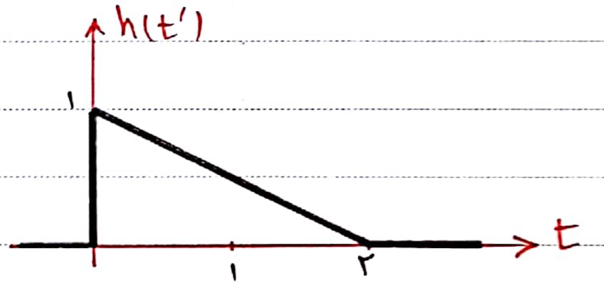


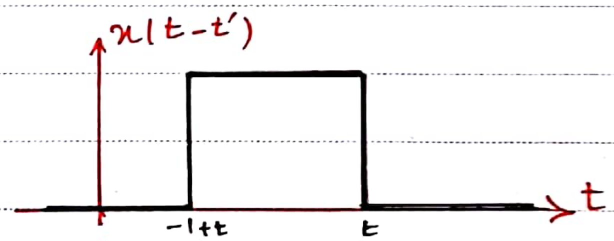
$$y(t)=\int_0^{t} h(t')x(t-t')\,dt' = S_1$$

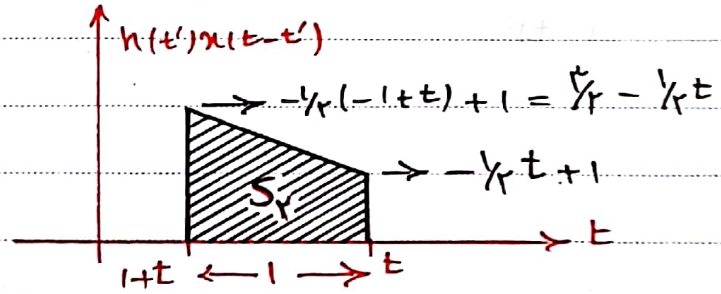
$$S_1=\frac{1-\frac{1}{2}t+1}{2}\times t=-\frac{1}{4}t^2+t$$

در $t=1 \rightarrow y(t)=\frac{3}{4}$

$1<t<2$



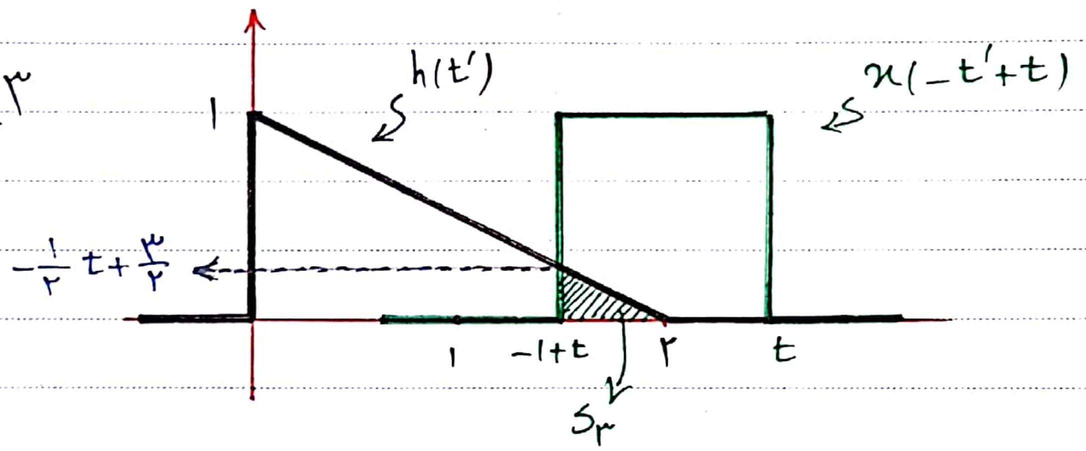




$$y(t) = S_۲ = \frac{-\frac{۱}{۲}t + ۱ + \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲}t}{۲} \times ۱ = -\frac{۱}{۲}t + \frac{۵}{۴}$$

در $t = ۱ \rightarrow y(t) = ۳/۴$

$۲ < t < ۳$



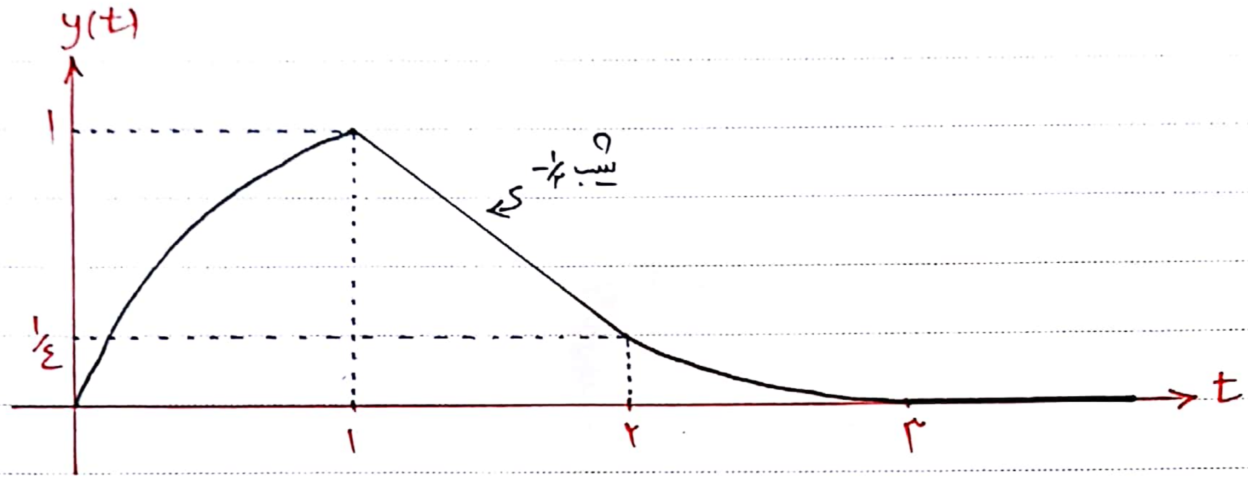
$$y(t) = S_۳ = \frac{۱}{۲} \times [۲ - (-۱ + t)] \times \left(-\frac{t}{۲} + \frac{۳}{۲}\right) = \frac{۱}{۴}(۳ - t)^۲$$

$t = ۳ \rightarrow y(t) = ۰ \quad , \quad t = ۲ \rightarrow y(t) = ۱/۴$

$t > ۳ \rightarrow h(t')x(t - t') = ۰ \rightarrow y(t) = ۰$

$$y(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \\ -\frac{۱}{۴}t^۲ + ۱ & ۰ < t < ۱ \\ -\frac{۱}{۲}t + \frac{۵}{۴} & ۱ < t < ۲ \\ \frac{۱}{۴}(۳ - t)^۲ & ۲ < t < ۳ \\ ۰ & t > ۳ \end{cases}$$

Subject ۱۵۹
Date



Subject
Date

فصل ۷

تجزیه و تحلیل مدارات دائمی سینوسی

PAPCO

تحلیل مدار در حالت دائمی سینوسی

حالت دائمی یعنی حالت گذرا سپری شده است (ورودی زمان نسبتاً زیادی به مدار اعمال شده است)

* مدارهایی را بررسی می‌کنیم که ورودی سینوسی دارند

تابع سینوسی نوعی $A\cos(\omega t+\theta)$

دامنه و فاز — فرکانس زاویه‌ای — فاز

مثال: $\text{برق شهر} = 220\sqrt{2}\cos(2\pi \times 50 t + \theta)$

$f(t)$ تابع متناوب با دوره‌ی تناوب T →

$$\begin{cases} f_{av} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt \\[2ex] f_{rms} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f^2(t)\,dt} \end{cases}$$

پاسخ هر مدار را می‌توان با حل معادله‌ی دیفرانسیل آن که به صورت زیر است، بدست آورد:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y(t) = b_0 w(t) + b_1 w(t) + \cdots + b_m w(t)$$

$w(t)$: ورودی مدار در حالت ورودی سینوسی ← تابع سینوسی است

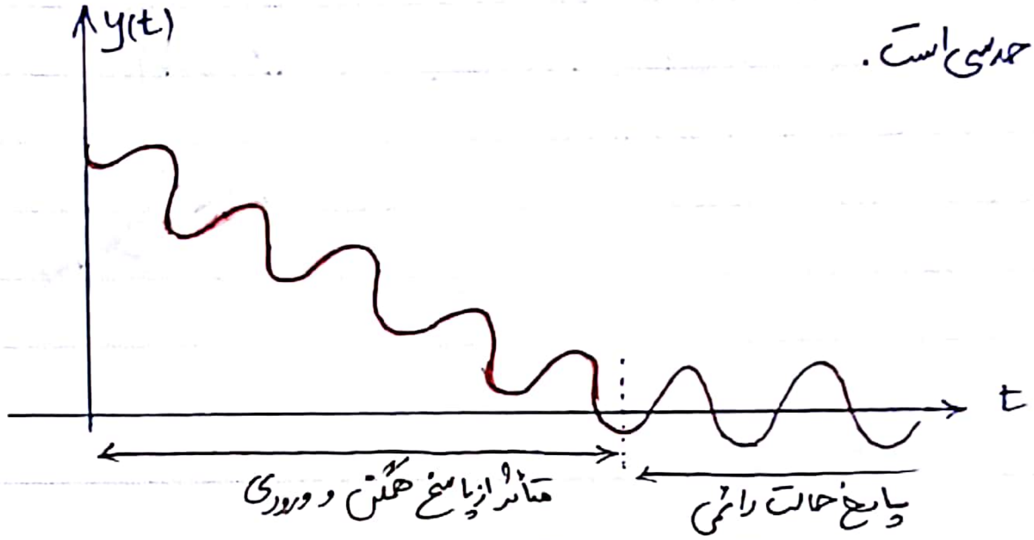
(هم شکل طرف دوم معادله سینوسی است : y_p)   پاسخ کامل $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

تابع سینوسی با مشتق گیری به شکل سینوسی می ماند، پس طرف دوم شکل سینوسی دارد.

$$y_h(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t}$$ متمایز s_iها $\Rightarrow t\to+\infty \Rightarrow y_h(t)\to 0$

$y_h(t)$ جزء میرای پاسخ است

$y_p(t)$ که به شکل سینوسی است جزء غیرمیرای پاسخ است، پس پاسخ حالت دائمی سینوسی در واقع همین پاسخ حدی است.



فرکانس در پاسخ حالت دائمی همان فرکانس ورودی است.

برای محاسبه پاسخ حالت دائمی محاسبه ی دامنه و فاز پاسخ کافی است. (حل فازوری جواب را می دهد)

بیان به صورت فازوری : ورودی $A\cos(\omega t+\theta) \rightarrow A\angle\theta = Ae^{i\theta}$

$x(t)$ X

در روش مش $\rightarrow$ $i(t)$ I

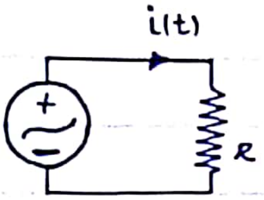
در روش گره $\rightarrow$ $e(t)$ E

$\left.\begin{matrix} I \\ E \end{matrix}\right\}$ سینوسی

امپدانس

طبق تعریف، نسبت فازور ولتاژ به فازور جریان، امپدانس است

منبع ولتاژ سینوسی



$$v(t) = A\cos(\omega t+\theta) \rightarrow A\angle\theta$$

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{A\cos(\omega t+\theta)}{R} \xrightarrow{\text{بیان فازوری}} \frac{A}{R}\angle\theta = I_R$$

فازور جریان مقاومت

امپدانس مقاومت $Z_R = \frac{V_R}{I_R} = \frac{A\angle\theta}{\frac{A}{R}\angle\theta}$

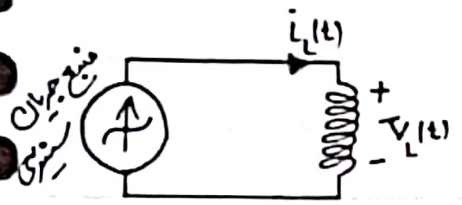
یادآوری از محاسبه‌ی مختلط

$$Z_1 = R_1\angle\theta_1 = R_1\cos\theta_1 + jR_1\sin\theta_1$$

$$Z_2 = R_2\angle\theta_2 = R_2\cos\theta_2 + jR_2\sin\theta_2$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2}\angle\theta_1-\theta_2$$

امپدانس سلف



$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -LI_m\omega\sin(\omega t+\theta)$$

$$= LI_m\omega\cos(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2})$$

فازور ولتاژ $\Rightarrow I_mL\omega\angle\theta+\frac{\pi}{2}$ بیان فازوری.

توجه: چون فازور را برای کسینوس در نظر گرفتیم، در رابطه ولتاژ سلف، سینوس را به کسینوس تبدیل کردیم تا فازور آن را بیان کنیم.

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{I_mL\omega\angle\theta+\pi/2}{I_m\angle\theta} = L\omega\angle\pi/2$$

$$= L\omega\left[\cos\pi/2 + j\sin\pi/2\right] = iL\omega \Rightarrow Z_L = iL\omega$$

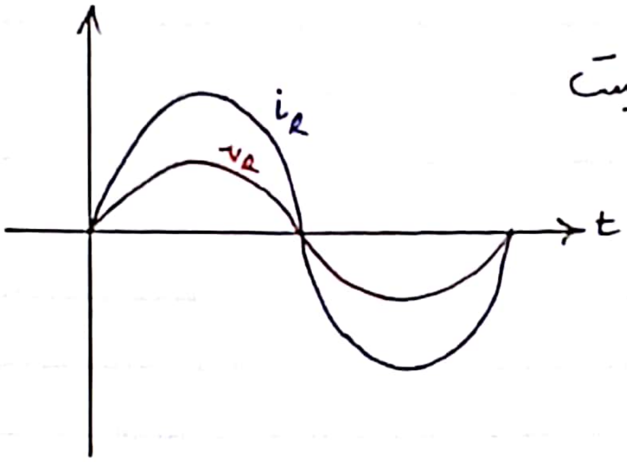
$\left.\begin{array}{r}\text{حالت DC}\\ \omega\to 0 \text{ یعنی}\end{array}\right\} \Rightarrow (Z_L = iL\omega)\to 0$ یعنی سلف اتصال کوتاه می‌شود

$\left.\begin{array}{r}\omega\to\infty\\ \text{یعنی تغییرات خیلی سریع زمانی}\end{array}\right\} \Rightarrow Z_L\to\infty$ یعنی سلف مدار باز می‌شود

زاویه‌ی امپدانس = زاویه ولتاژ − زاویه جریان

$$\angle Z = \angle V - \angle I$$

$$Z_R = 0 \rightarrow \measuredangle Z_R = 0 \rightarrow \measuredangle V_R = \measuredangle I_R$$



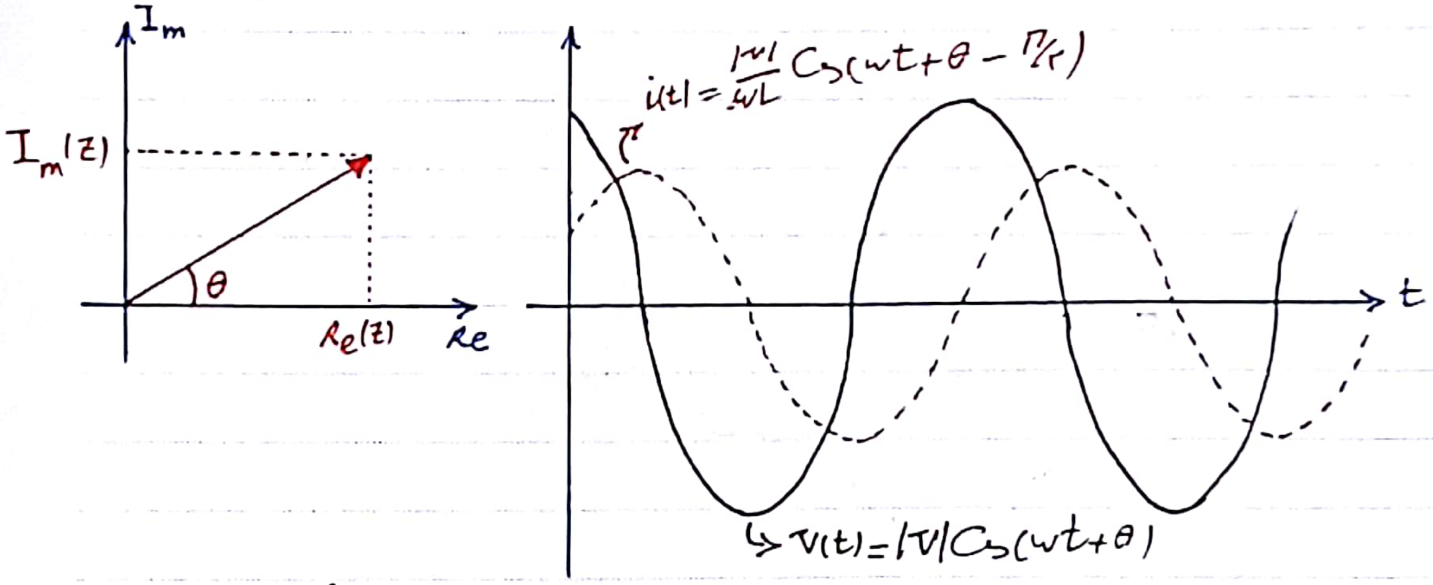
در صورت اختلاف فازی بین ولتاژ و جریان نیست

$$\measuredangle Z_L = \measuredangle V_L - \measuredangle I_L = \pi/2$$

$$\measuredangle V_L = \pi/2 + \measuredangle I_L$$

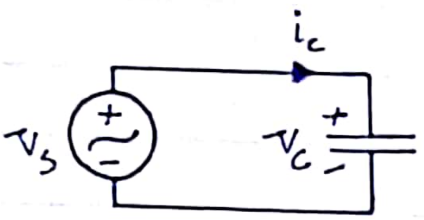
فازور به صورت عدد مختلط در نظر گرفته شده است.

پس می توان مشابه اعداد مختلط در صفحه‌ی مختلط، آن ها را رسم کرد (با دامنه و فاز یا قسمت حقیقی و موهومی)



جریان سلف ۹۰ درجه نسبت به ولتاژ آن عقب است (به آن "پس فاز" می گویند)

امپدانس خازن



$$V_s = V_m \cos(\omega t + \theta) = V_c(t)$$

بیان فازوری $\rightarrow$ $V_c = V_m \angle \theta$

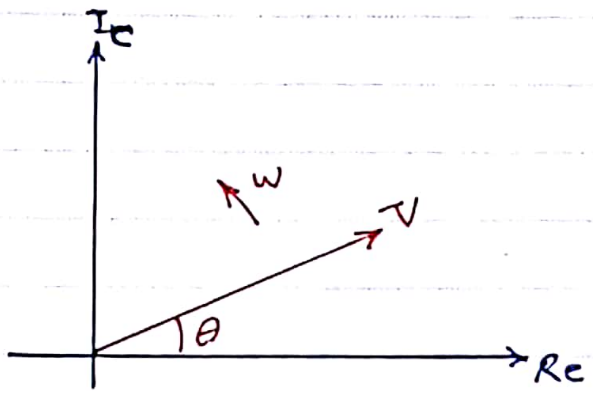
$$i_c(t) = C\frac{dV_c}{dt} = -CV_m\omega \sin(\omega t+\theta) = C\omega V_m \cos(\omega t + \theta + \pi/2)$$

بیان فازوری $\Rightarrow$ $I_c = C\omega V_m \angle \theta + \pi/2 = I_m \angle \theta + \pi/2$

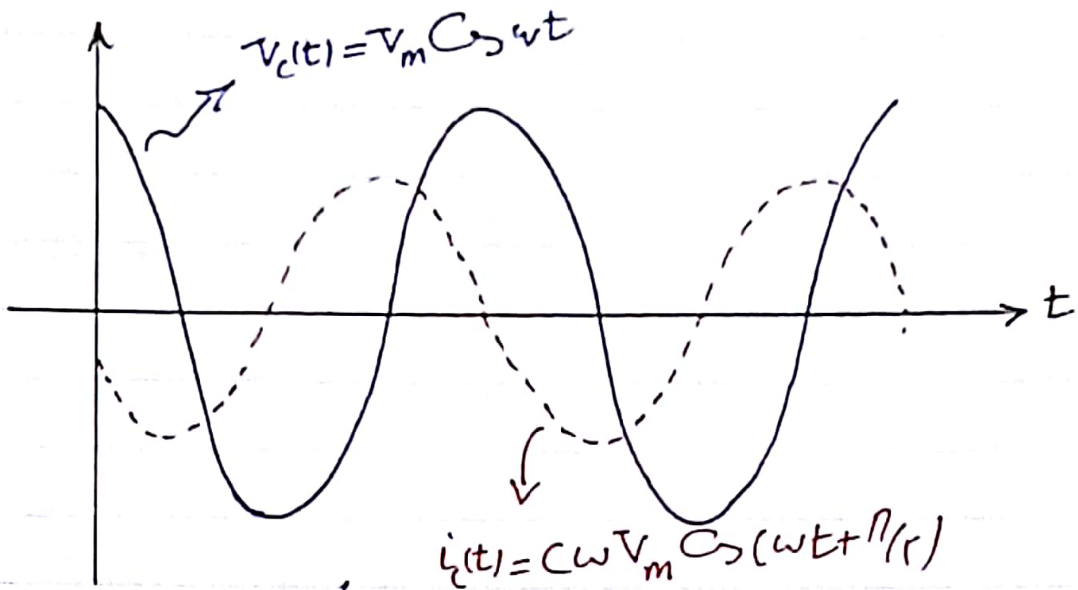
$$Z_c = \frac{V_m \angle \theta}{C\omega V_m \angle \theta + \pi/2} = \frac{1}{C\omega}\angle -\pi/2 = -\frac{j}{C\omega} = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\angle Z_c = \angle V_c - \angle I_c = -\pi/2$$

$$\angle I_c = \pi/2 + \angle V_c$$



$$|I_c| = C\omega V_m$$



جریان خازن نسبت به ولتاژ آن ۹۰° جلو است (به آن " پیش فاز" می‌گویند)

ادمیتانس Y (عکس امپدانس)

نسبت فازور جریان به فازور ولتاژ است.

$$Y = \frac{I}{V} = \begin{cases} \frac{1}{R} = G & \text{مقاومت} \\ \frac{1}{jL\omega} = -\frac{j}{L\omega} & \text{سلف} \\ jC\omega & \text{خازن} \end{cases}$$

$\omega = 0 \rightarrow Y_C = 0$ هدایت خازن در حالت با فرکانس خیلی کم، صفر می‌شود

$\omega = 0 \rightarrow Y_L \rightarrow \infty$ هدایت سلف برای تغییرات با فرکانس خیلی کم، خیلی بزرگ می‌شود

کاربرد فازور

برای تحلیل یک مدار در حالت دائمی سینوسی می توان مدار را به حالت فازوری برد.

یعنی
- به جای منابع، فازور آن ها را جایگزین کرد
- به جای مقاومت، سلف و خازن، امپدانس یا ادمیتانس جایگزین کرد

سپس با مدار مثل یک مدار مقاومتی رفتار می کنیم
- امپدانس مشابه مقاومت
- ادمیتانس مشابه سلف

و از روش های گفته شده برای مدار مقاومتی می توان مدار مشابه را تحلیل کرد
- تشخیص سری و موازی
- ستاره - مثلث
- تبدیل منابع
- تقسیم ولتاژ
- روش گره
- روش مش

Subject ۱۶۸
Date ۹۷,۲,۲۳ یکشنبه

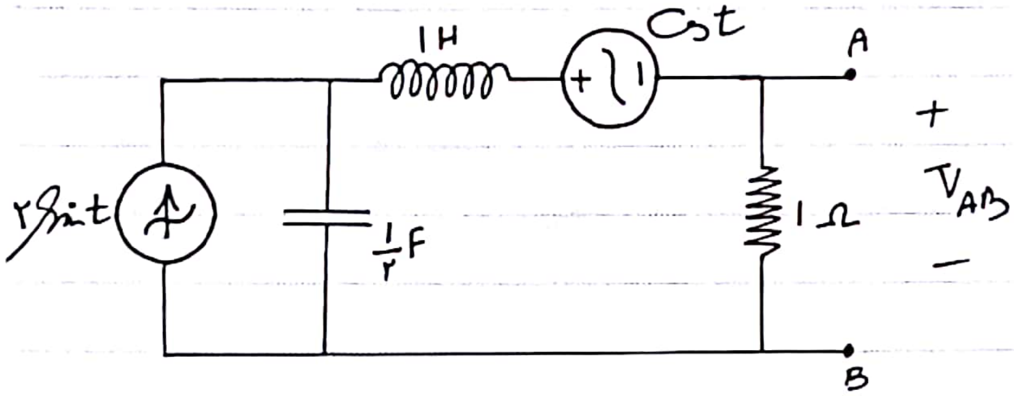
تحلیل مدار در حالت دائمی سینوسی

حل فازوری:
- به جای منابع، فازور آن‌ها قرار می‌گیرد
- به جای عناصر مدار، امپدانس یا ادمیتانس

با استفاده از روش‌های تحلیل به فازور پاسخ می‌رسیم و آن را نیز را به معادله زمانی تبدیل می‌کنیم.

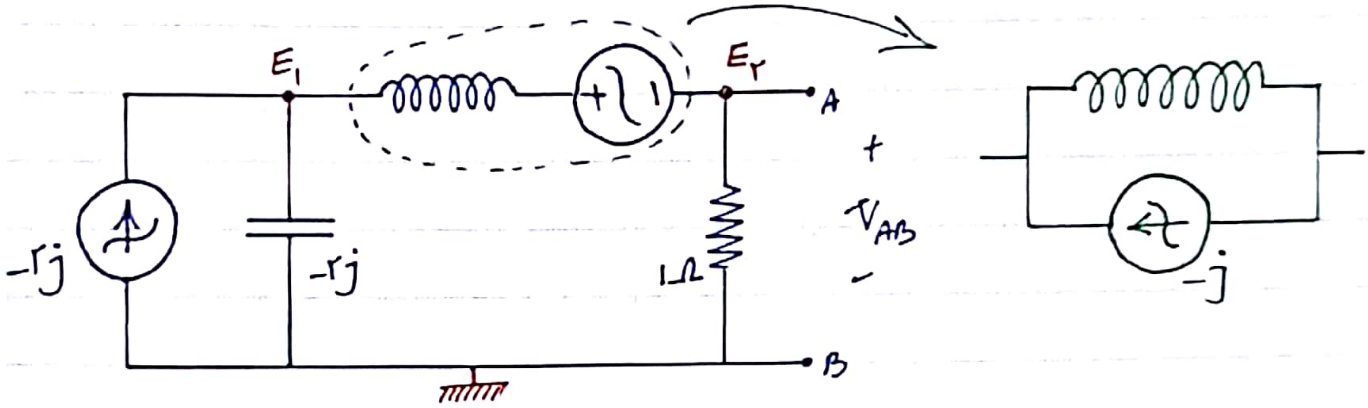
(دامنه و فاز را داریم؛ فرکانس پاسخ با فرکانس ورودی یکی است و فرم جواب حالت دائمی نیز مشابه ورودی است)

مثال: در مدار زیر $V_{AB}(t)$ را در حالت دائمی سینوسی بدست آورید.



	فازور
$\cos t$	$1\angle 0$
$2\sin t = 2\cos(t-\pi/2)$	$1\angle -\pi/2 = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2})\right] = -2j$
$1\ H$	$Z_L = jL\omega = j\times 1 = j$
$\frac{1}{2}\ F$	$Z_C = -\frac{j}{C\omega} = \frac{-j}{\frac{1}{2}\times 1} = -2j$
$1\ \Omega$	1

پس مدار فازوری به شکل زیر است



$$KCL(1) \rightarrow -2j + \frac{E_1}{-2j} + \frac{E_1 - E_2}{j} - (-j) = 0$$

$$4 - E_1 + 2E_1 - 2E_2 - 2 = 0$$

$$\boxed{E_1 - 2E_2 = -2} \quad \text{(I)}$$

$$KCL(۲) \rightarrow \frac{E_۲}{۱} + \frac{E_۲ - E_۱}{j} - j = ۰$$

$$jE_۲ + E_۲ - E_۱ + ۱ = ۰$$

$$\boxed{E_۱ = ۱ + (j+۱)E_۲} \quad (II)$$

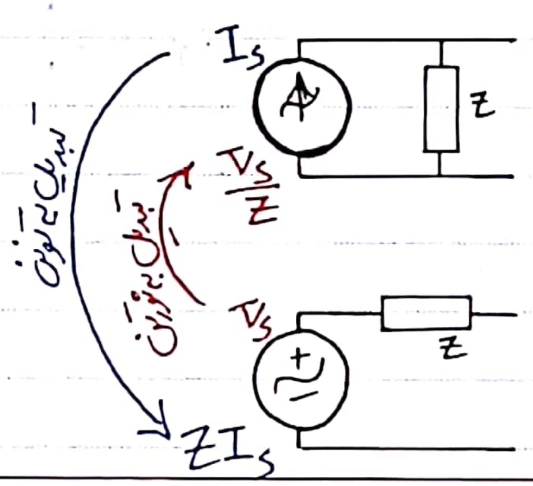
$$(I),(II) \Rightarrow ۱ + (j+۱)E_۲ - ۲E_۲ = -۲$$

$$(j-۱)E_۲ = -۳ \Rightarrow E_۲ = \frac{۳}{۱-j} = \frac{۳\angle ۰}{\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ} = \underbrace{\frac{۳}{\sqrt{۲}}\angle ۴۵^\circ}$$

فازور پاسخ V_{AB}

$$V_{AB} = ۲٫۱۴ \angle ۴۵^\circ$$

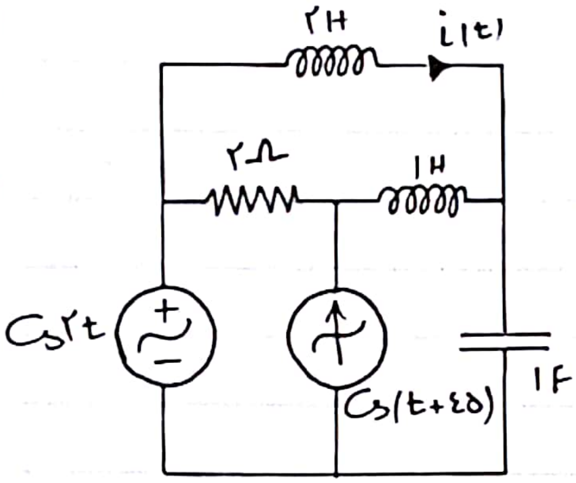
$$V_{AB}(t) = ۲٫۱۴ \cos[(۱\times t) + ۴۵^\circ] = ۲٫۱۴ \cos(t + ۴۵^\circ) = V_{AB}(t)$$



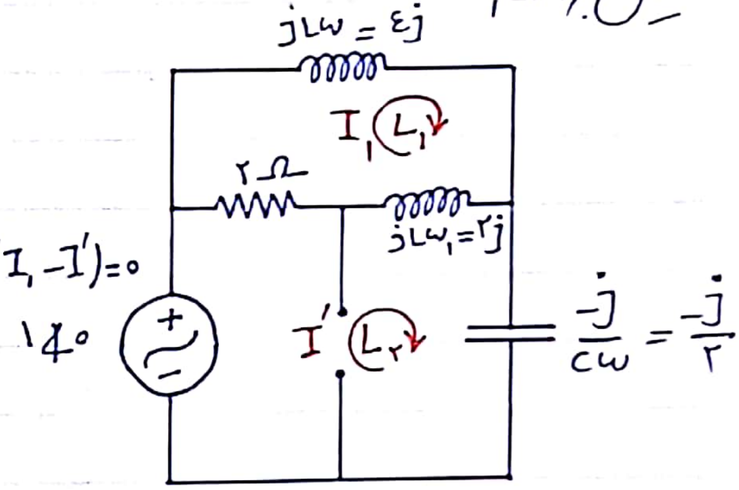
پاسخ حالت دائمی در حالت ورودی با فرکانس های مختلف

اگر یک مدار تحت اثر منابع سینوسی با فرکانس مختلف باشد، پاسخ حالت دائمی آن نیز دارای فرکانس های مختلف مطابق ورودی است. روش حل در این مسائل، جمع آثار است. هر بار یک فرکانس را در مدار در نظر می گیریم و منابع با فرکانس های دیگر را خنثی می کنیم و پاسخ زمانی مربوط به آن فرکانس را محاسبه می کنیم. پاسخ زمانی کامل، جمع پاسخ های زمانی مربوط به هر فرکانس است.

مثال: در حالت دائمی سینوسی، $i(t)=?$



تحلیل برای $\omega_1=2$



$$KVL(L_1) \rightarrow 2(I_1 - I') + 4j\, I_1 + 2j(I_1 - I') = 0$$

$$(2+6j) I_1 = (2+2j) I'$$

$$(1+3j) I_1 = (1+j) I'$$

$$\Rightarrow \boxed{I' = \frac{1+3j}{1+j} I_1}$$ معادله ۱

$$KVL(L_۲) \Rightarrow -۱\angle ۰ + ۲(I' - I_۱) + ۲j(I' - I_۱) - \frac{j}{۲} I' = ۰$$

$$\left(۲ + ۳\frac{j}{۲}\right) I' = ۱ + (۲ + ۲j) I_۱$$

$$\text{① معادله} \longrightarrow \frac{۴ + ۳j}{۲} \times \frac{۱ + ۳j}{۱ + j} I_۱ = ۱ + ۲I_۱ + ۲jI_۱$$

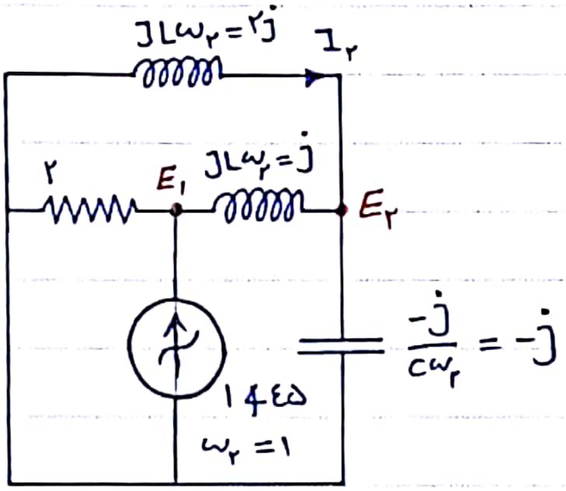
$$(-۵ + ۱۵j) I_۱ = (۲ + ۲j)(۱ + ۲I_۱ + ۲j I_۱)$$

$$= ۲ + ۲j + ۲j I_۱$$

$$-۵I_۱ + ۱۵jI_۱ = ۲ + ۲j + ۲jI_۱$$

$$\Rightarrow I_۱ = \frac{۲ + ۲j}{-۵ + ۱۳j} = \frac{۲\sqrt{۲} \angle ۴۵^\circ}{\sqrt{۱۹۴} \angle ۹۰^\circ + ۶۸^\circ}$$

$$I_۱ = ۰/۲۰۳ \angle -۱۱۳^\circ \rightarrow i_۱(t) = ۰/۲ \cos(۲t - ۱۱۳^\circ)$$



تحلیل برای $\omega_۲ = ۱$

$$KCL① \Rightarrow \frac{E_۱}{۲} - ۱\angle ۴۵ + \frac{E_۱ - E_۲}{j} = ۰$$

$$jE_۱ + ۲E_۱ - ۲E_۲ = ۲j \angle ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{(j + ۲) E_۱ - ۲E_۲ = ۲\angle ۴۵ + ۹۰}$$

*

$$KCL(2) \rightarrow \frac{E_2}{-j} + \frac{E_2 - E_1}{j} + \frac{E_2 - 0}{2j} = 0$$

$$-2E_2 + 2E_2 - 2E_1 + E_2 = 0 \rightarrow E_1 = \frac{E_2}{2}$$

$$* \ ,2 \rightarrow (j+2)\frac{E_2}{2} - 2E_2 = 2\angle 45^\circ$$

$$(j-2)E_2 = 4\angle 135^\circ \rightarrow E_2 = \frac{4\angle 135^\circ}{j-2}$$

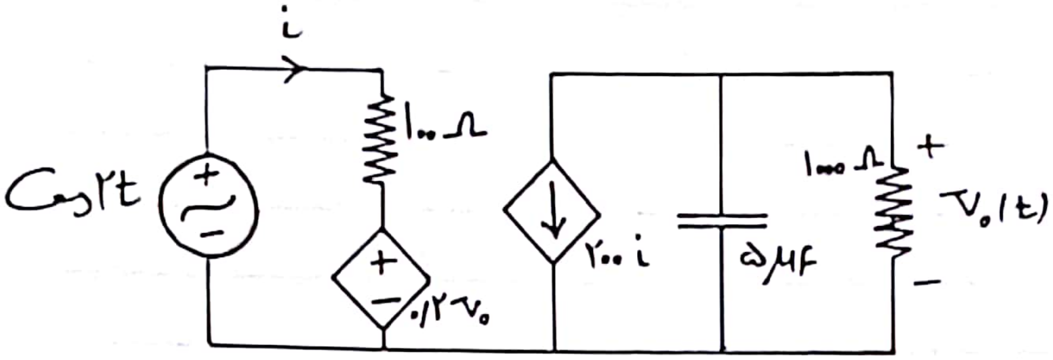
$$I_2 = -\frac{E_2}{2j} = \frac{-4\angle 135^\circ}{-2-4j} = \frac{2\angle 135^\circ}{1+2j} = \frac{2\angle 135^\circ}{\sqrt{5}\angle 63.4^\circ}$$

$$I_2 = 0.89 \angle 71.6^\circ$$

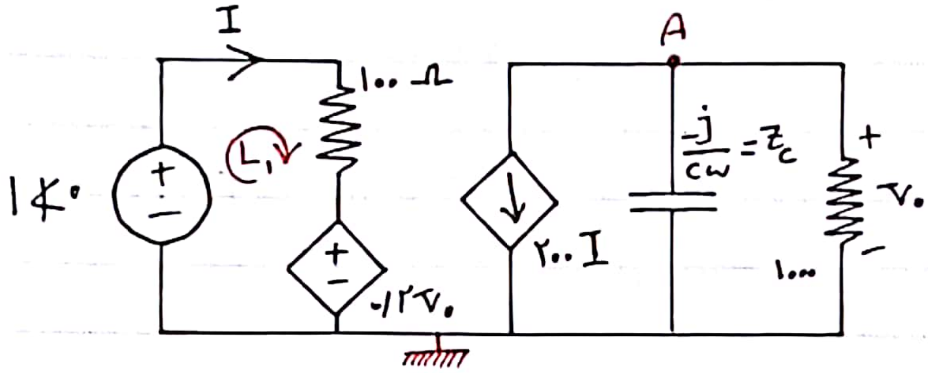
$$\Rightarrow i_2(t) = 0.89 \cos(1t + 71.6^\circ)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

تحلیل مدار در حالت دائمی و سینوسی با منبع وابسته



رسم مدار در حالت فازوری



$$Z_c = \frac{-j}{C\omega} = \frac{-j}{5\times10^{-6}\,F \times 200} = -j \times \frac{10^{6}}{10^{3}} = -1000\,j$$

$$KVL(L_1) \Rightarrow -1\angle 0 + 100\,I + 0.2\,V_o = 0 \Rightarrow \boxed{I = \frac{1-0.2\,V_o}{100}}$$

**

$$KCL(A) \Rightarrow 200\,I + \frac{V_o}{-1000j} + \frac{V_o}{1000} = 0$$

** در معادله $\Rightarrow 2 - 0.4\,V_o + \frac{jV_o}{1000} + \frac{V_o}{1000} = 0$

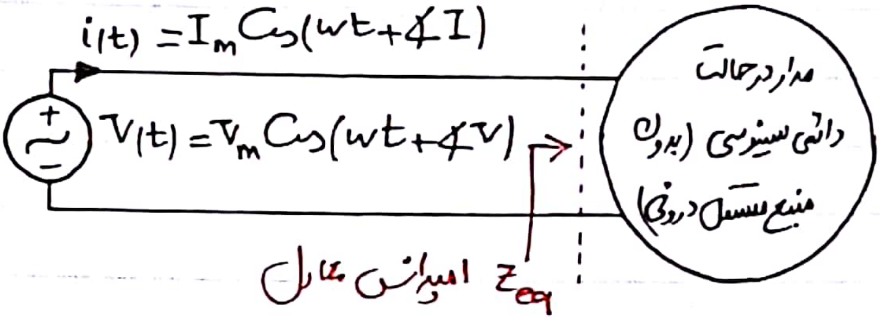
$$۲۰۰۰ - ۴۰۰V_0 + jV_0 + V_0 = ۰ \quad , \quad V_0 = \frac{۲۰۰۰}{۳۹۹ - j}$$

توان در حالت دائمی سینوسی

توان لحظه‌ای $p(t) = v(t)\, i(t)$

توان متوسط $P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\, i(t)\, dt$

در حالت دائمی سینوسی همه ولتاژها و جریان‌ها سینوسی هستند.



محاسبه‌ی توان متوسط داده شده توسط منبع به مدار

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T V_m \cos(\omega t + \measuredangle V)\, I_m \cos(\omega t + \measuredangle I)\, dt$$

$$P_{av} = \frac{1}{T}\,\frac{V_m I_m}{2}\int_0^T \left[\cos(2\omega t + \measuredangle V + \measuredangle I) + \cos(\measuredangle V - \measuredangle I)\right] dt$$

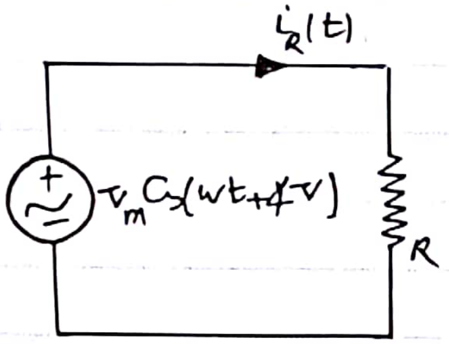
$$P_{av} = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\measuredangle V - \measuredangle I)$$

در حالت موج سینوسی

$$\begin{cases} V_{eff} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}} \\ I_{eff} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow V_{eff} I_{eff} = \frac{V_m I_m}{2}$$

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} \quad , \quad \measuredangle Z_{eq} = \measuredangle V - \measuredangle I \quad , \quad |Z_{eq}| = \frac{|V|}{|I|} = \frac{V_m}{I_m}$$

توان متوسط برای مقاومت :



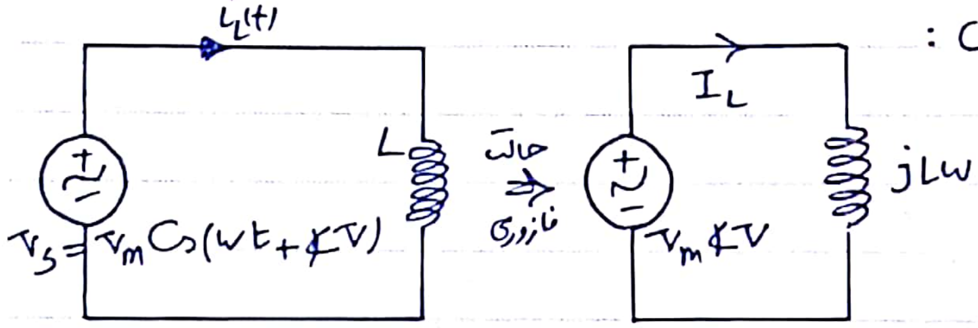
$$i_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_m}{R} \cos(\omega t + \measuredangle V)$$

$$P_{av} = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\measuredangle V - \measuredangle I)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} \cos(0) = \frac{V_m I_m}{2}$$

$$= V_{eff} I_{eff} = \frac{V_m^2}{2} = \frac{R I_m^2}{2}$$

توان متوسط برای سلف :



Subject ۱۷۷
Date

$$I_L = \frac{V_m \measuredangle V}{jL\omega} = \frac{V_m}{L\omega}\frac{\measuredangle V}{\measuredangle 90} = \frac{V_m}{L\omega}(\measuredangle V - \measuredangle 90)$$

$$\measuredangle I_L = \measuredangle V - \measuredangle 90$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\underbrace{\measuredangle V - \measuredangle I}_{\text{برای سلف } 90^\circ}) = 0$$

به همین ترتیب برای خازن داریم :

P_{av} خازن $= 0$

$$\measuredangle V - \measuredangle I = -90 \rightarrow P_{av} = 0$$

* توان حقیقی (اکتیو) فقط مربوط به تلف در مقاومت های مدار است

PAPCO

توان ظاهری S

تعریف توان ظاهری :

$$S = \frac{1}{2} \bar{V} \bar{I}^{*}$$ ← توان ظاهری در حالت دائمی

$\bar{V}$ ← فازور ولتاژ

$\bar{I}^{*}$ ← مزدوج فازور جریان

$$S = \frac{1}{2} V_m \angle \theta (I_m \angle \varphi)^{*} = \frac{1}{2} V_m \angle \theta \times I_m \angle -\varphi$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \angle \theta - \varphi$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \varphi) + j \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta - \varphi)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I)} + j \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \sin(\angle V - \angle I)}$$

P_{av} توان حقیقی (توان اکتیو) (واحد : Watt)

Q توان موهومی (توان راکتیو) (واحد : VAR)

$$P_{av} = V_{eff} I_{eff} \cos(\angle Z)$$

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin(\angle Z)$$

برای سلف : $\angle Z_L = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} P_{av} = 0 \\ Q = V_{eff} I_{eff} \end{cases}$

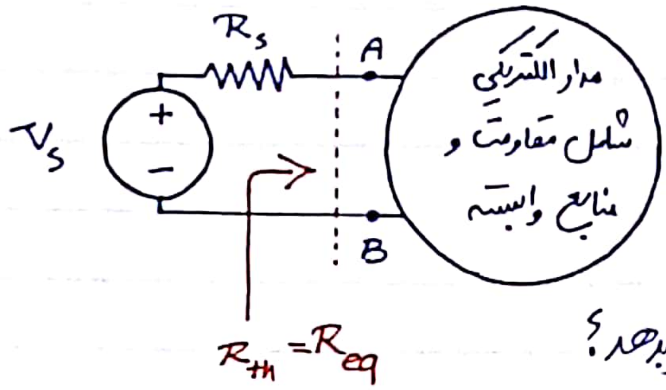
برای خازن : $\angle Z_C = -90^\circ \Rightarrow \begin{cases} P_{av} = 0 \\ Q = -V_{eff} I_{eff} \end{cases}$

سلف و خازن توان موهومی دارند، برای سلف توان موهومی مثبت و برای خازن این توان منفی است.

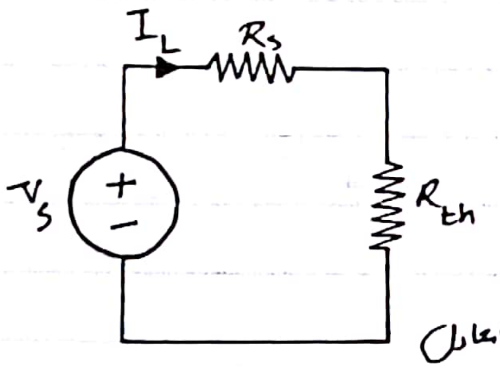
← سلف و خازن می توان یکدیگر را تعدیل (خنثی) کنند.

انتقال توان بیشینه

در حالت DC



چه شرایطی برقرار باشد تا منبع بیشترین توان را به مدار بدهد؟



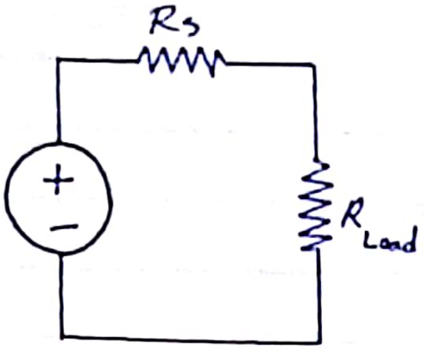
$$I_L = \frac{V_s}{R_s + R_{th}}$$

توان بار $P_L = R_{th} I_L^2 = \dfrac{R_{th} \times V_s^2}{(R_s + R_{th})^2}$

توان روی مقاومت معادل

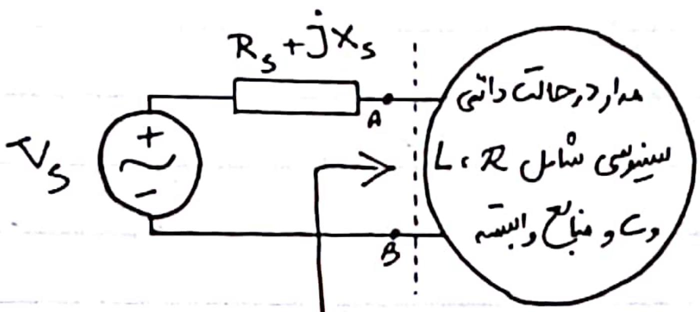
$$\frac{dP_L}{dR_{th}} = \frac{(R_s+R_{th})^2 - 2(R_s+R_{th})R_{th}}{(R_s+R_{th})^4} = 0$$

$$(R_s+R_{th})(R_s+R_{th}-2R_{th}) = 0 \rightarrow R_s - R_{th} = 0 \rightarrow R_s = R_{th}$$



$\Rightarrow R_s = R_{Load} \Rightarrow$ درانصورت P_{Load} توان بار بیشترین مقدار را دارد

قضیه‌ی انتقال بیشترین توان در حالت دائمی سینوسی

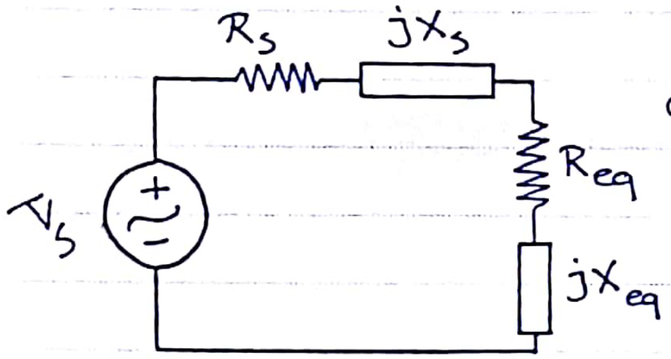


$Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$

خاصیت سلفی $X_{eq} > 0$

خاصیت خازنی $X_{eq} < 0$

چه شرایطی باید برقرار باشد که مدار بیشترین توان را جذب کند؟



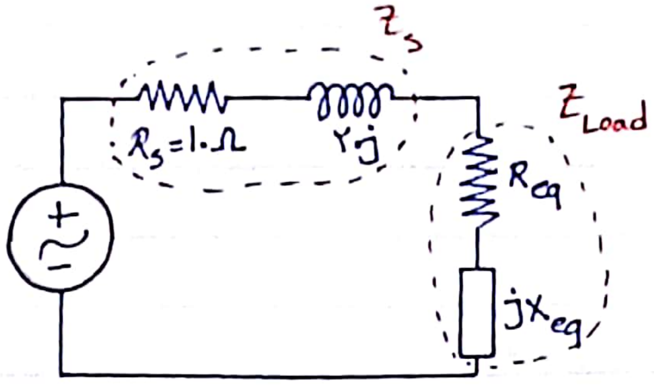
فازور جریان $I = \dfrac{V_s}{(R_s+R_{eq}) + j(X_s+X_{eq})}$

$$P_{R_{eq}} = \frac{1}{2} R_{eq} |I|^2 = \frac{1}{2} R_{eq} \cdot \times \frac{|V_s|}{\sqrt{(R_s+R_{eq})^2 + (X_s+X_{eq})^2}}$$

$$\frac{dP_{R_{eq}}}{dR_{eq}} = 0 \quad , \quad \frac{dP_{R_{eq}}}{dX_{eq}} = 0$$

$\Rightarrow R_s = R_{eq}$, $X_s = -X_{eq}$

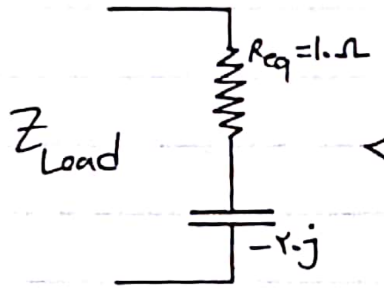
شرط انتقال بیشترین توان به بار؟



با توجه به روابطی که در قبل بدست آوردیم:

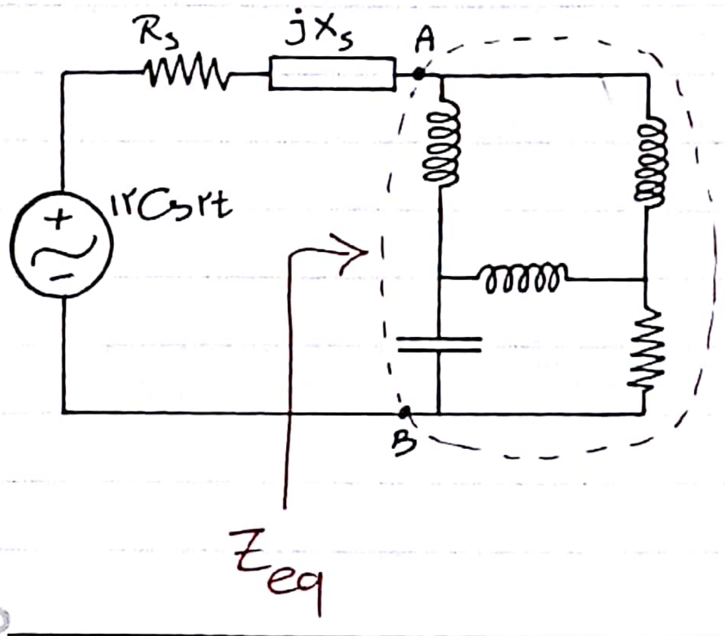
$$Z_s = Z_{Load}$$

$$Z_s = 10 + 20j \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} X_s = 20j = -X_{eq} \\ R_s = R_{eq} \end{array}} \Rightarrow Z_{Load} = 10 - 20j$$



با توجه به X_{eq} که بدست آمد، در واقع Z_{Load} به این شکل است $\Leftarrow$

در شکل زیر امپدانس دیده شده از A و B را بدست آورید و R_s و X_s را برای انتقال بیشترین توان به بار تعیین کنید و مقدار این بیشترین توان را محاسبه کنید.

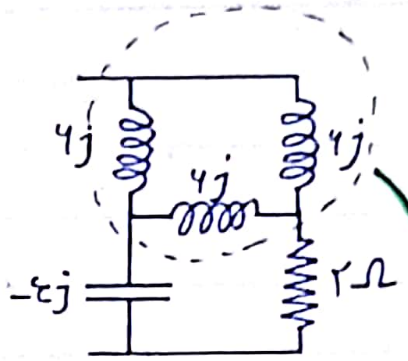


امپدانس باید در فرکانس اعمالی محاسبه شود $(\omega = 2)$

$$Z_L = jL\omega = j3\times 2 = 6j$$

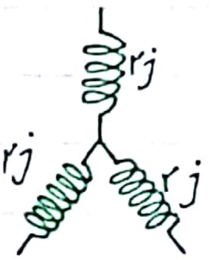
$$Z_C = -\frac{j}{C\omega} = -\frac{j}{\frac{1}{8}\times 2} = -4j \Rightarrow$$

$$Z_R = R = 2$$

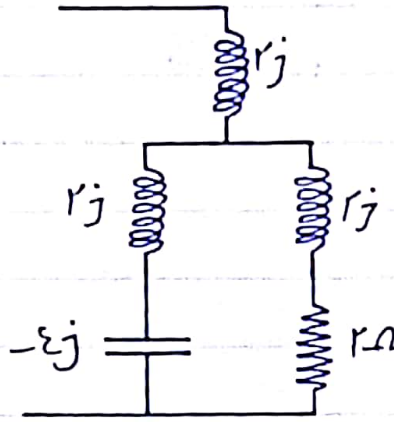


مثلث به ستاره

$$\frac{6j\times 6j}{6j+6j+6j} = 2j$$



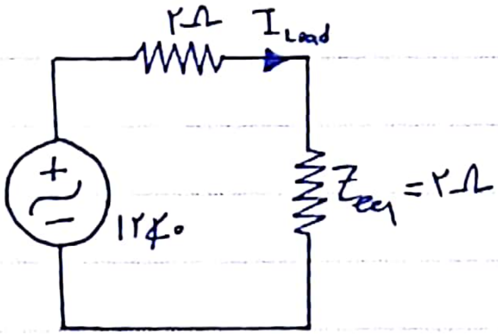
$\Leftarrow$



$$Z_{eq} = 2j + \left[(-2j)\,\|\,(2+2j)\right] = 2j + \frac{(-2j)(2+2j)}{-2j+2+2j} = 2j - 2j(1+j)$$

$$= 2\,\Omega$$

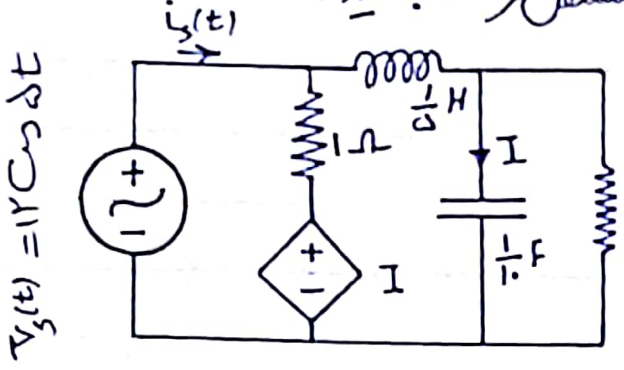
$$\Rightarrow Z_{eq} = 2\,\Omega \Rightarrow R_s = R_{eq} = 2\,\Omega \rightarrow X_s = X_{eq} = 0$$



$$I_{Load} = \frac{12\angle 0}{2+2} = 3\angle 0$$

$$P_{Load} = \frac{1}{2} R_{eq} |I_{Load}|^2 = \frac{1}{2}\times 2\times 3^2 = 9\,\text{watt}$$

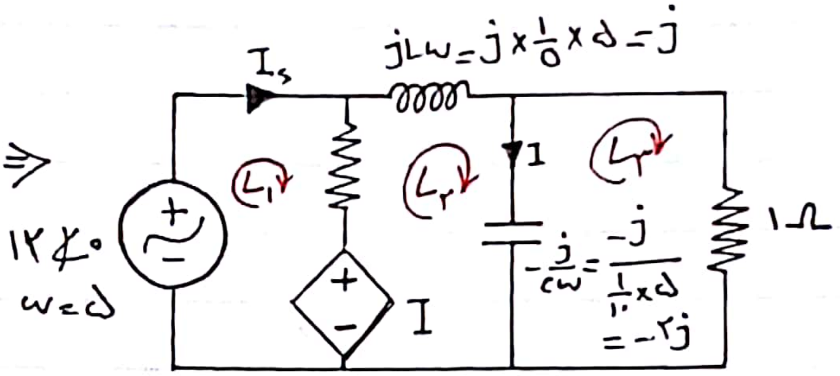
در مدار زیر توان حقیقی و موهومی کشیده شده از منبع مستقل را حساب کنید.



توان حقیقی $P = \frac{1}{2}|V_s||I_s|\cos(\angle V_s - \angle I_s)$

توان موهومی $Q = \frac{1}{2}|V_s||I_s|\sin(\angle V_s - \angle I_s)$

حالت فازوری مدار $\Rightarrow$



$$KVL(L_1) \Rightarrow -12 + (I_s - I_1)\times 1 + I = 0$$

$$I = I_1 - I_2 \Rightarrow -12 + I_s - I_1 + I_1 - I_2 = 0$$

$$\boxed{-12 + I_s - I_2 = 0} \; *$$

$$KVL(L_2) \Rightarrow -I + (I_1 - I_s)\times 1 + jI_1 - 2j(I_1 - I_2) = 0$$

$$-I_1 + I_2 + I_1 - I_s + jI_1 - 2jI_1 + 2jI_2 = 0$$

$$(1+2j)\underbrace{I_2}_{\text{جریان در } L_3} - j\underbrace{I_1}_{\text{جریان در } L_2} - I_s = 0$$

$$KVL\ (L_۲) \Rightarrow (-۲j)(I_۲ - I_۱) + I_۲ \times ۱ = ۰$$

$$(۱ - ۲j)\, I_۲ + ۲j\, I_۱ = ۰$$

$$۲\times \begin{cases} (۱ + ۲j)\, I_۲ - j I_۱ = I_s \\ (۱ - ۲j)\, I_۲ - ۲j I_۱ = ۰ \end{cases}$$

$$(۳ + ۲j)\, I_۲ = ۲ I_s$$

$$I_۲ = \frac{۲}{۳ + ۲j} I_s \xrightarrow{\text{* در معادله ی}} -۱۲ + I_s - \frac{۲}{۳ + ۲j} I_s = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱ + ۲j}{۳ + ۲j} I_s = ۱۲ \rightarrow I_s = ۱۲ \times \frac{۳ + ۲j}{۱ + ۲j}$$

$$= ۱۲ \times \frac{\sqrt{۱۳} \measuredangle ۳۳,۷}{\sqrt{۵} \measuredangle ۶۳,٤} = ۱۹,۳ \measuredangle -۲۹,۸^\circ$$

توان حقیقی $P = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۹,۳ \times \cos(۰ + ۲۹,۸) \Rightarrow P = ۱۰۰,٤۸\ W$

$$Q = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۹,۳ \times \sin(۰ + ۲۹,۸^\circ) \Rightarrow Q = ۵۷,۵٤\ VAR$$

چون $Q > ۰$ ، مصرف سلفی بوده است

تمرین : از دید دو سر منبع در همین فرکانس $\omega = 5$ ، امپدانس معادل را حساب کنید.

$$Z_{eq} = \frac{V_s}{I_s} = \frac{12\angle 0}{19.4\angle -29.8} = 0.62\angle 29.8$$

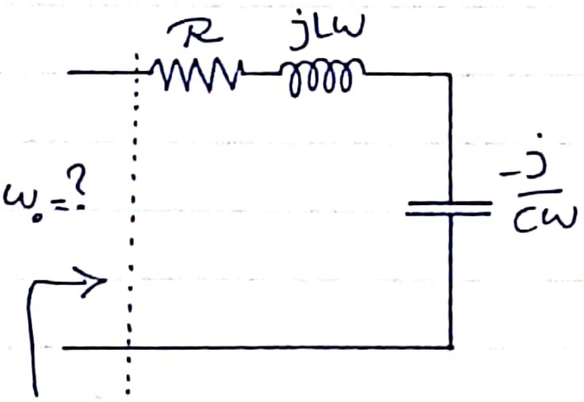
$$= 0.62\cos(29.8^\circ) + j\,0.62\sin(29.8^\circ)$$

$$= \underbrace{0.53}_{R_{eq}} + \underbrace{0.3j}_{jL_{eq}\times\omega = jL_{eq}\times 5 = 0.3j}$$

$$\rightarrow L_{eq} = 0.06\,H$$

فرکانس تشدید

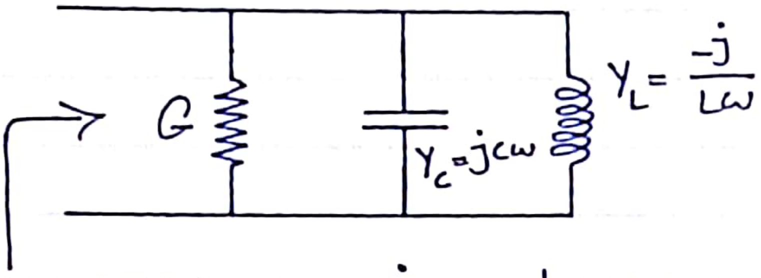
فرکانس تشدید در حالت دائمی سینوسی عبارتست از فرکانسی که در آن جزء موهومی امپدانس یا ادمیتانس برابر صفر شود. در این حالت امپدانس یا ادمیتانس، حداقل می‌شوند.



$\omega_0 = ?$ فرکانس تشدید

$$Z_{eq}(j\omega) = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

برای محاسبه فرکانس تشدید، هم امپدانس را می‌توان حساب کرد و هم ادمیتانس را می‌توان محاسبه کرد. هرکدام راحت‌تر بود را محاسبه کنید و جزء موهومی را صفر کنید.



$$Y_{eq} = G + jC\omega - \frac{j}{L\omega} = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$I_m\{Y_{eq}(j\omega_0)\} = 0 \rightarrow C\omega_0 - \frac{1}{L\omega_0} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

* به ازای عبور جریان مشخص v ولتاژ تشدید، حداکثر است

Subject
Date

فصل ۸

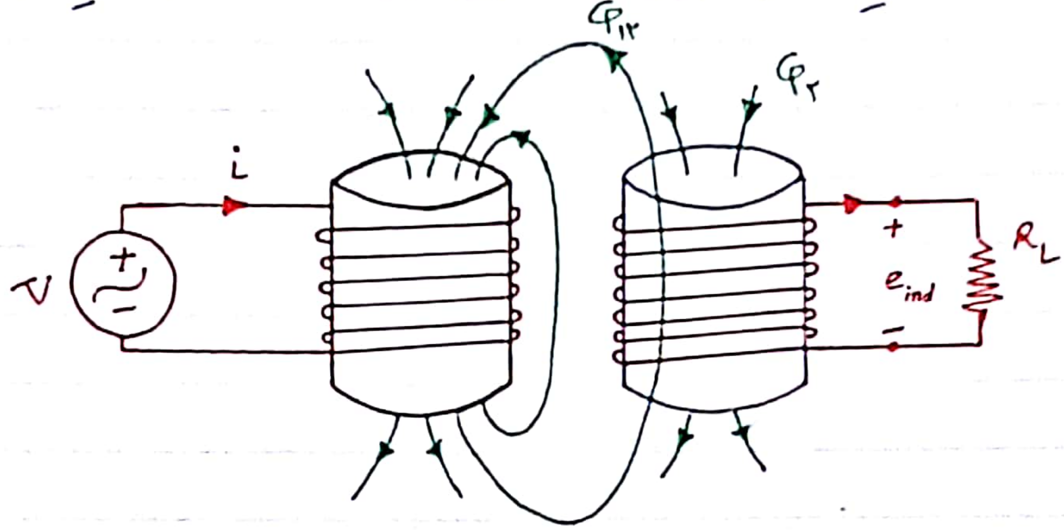
عناصر تزویج کننده

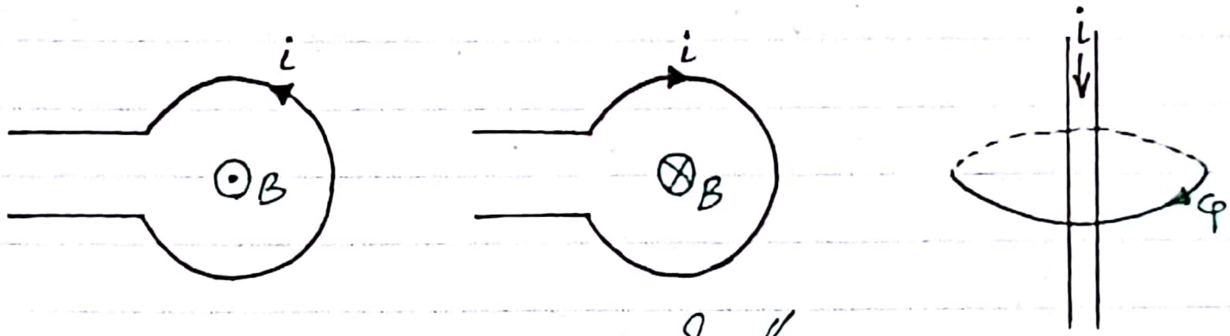
و مدارهای تزویج شده

Subject ۱۸۷
Date ۹۷/۲/۳۰ یکشنبه

مدارهای تزویج

ارتباط ایجاد شده از طریق شار مغناطیسی ⟵ این ارتباط شار، آثار الکتریکی دارد





B : چگالی شار مغناطیسی

$$B = \frac{\Phi}{A} \quad \frac{\text{وبر}}{m^2}$$

$$B = \mu H$$

اگر مطابق شکل از یک سیم پیچ، جریان متغیر با زمان عبور کند و این سیم پیچ در مجاور سیم پیچ دیگری قرار داشته باشد، به طوری که قسمتی از شار ایجاد شده توسط سیم پیچ اول از روی عبور کند، طبق قانون فارادی در سیم پیچ دوم ولتاژ القایی شود.

$$e_{ind} \propto \frac{d\varphi_{12}}{dt}$$

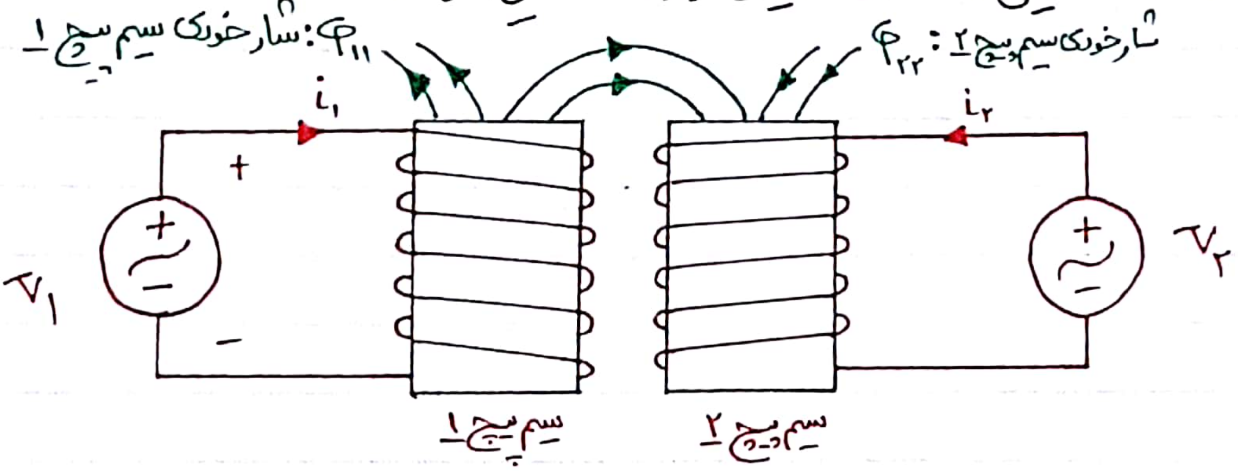
شار عبوری از سیم پیچ دوم

* قانون لنز

پلاریته‌ی ولتاژ القایی به صورتی خواهد بود که اگر بتواند در یک مدار جریان ایجاد کند، جهت شار ایجاد شده از این جریان دوم با عامل ایجاد خود (شار اول) مخالفت کند

$\leftarrow$ φ_2 و φ_{12} طبق قانون لنز خلاف جهت هم هستند

* ارتباط مغناطیسی باعث ایجاد جریان و ارتباط الکتریکی می تواند باشد.



کل شار عبوری از سیم پیچ ۱ : $\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}$ ⟵ قسمتی از شار سیم پیچ ۲ (ناشی از i_2) که از سیم پیچ ۱ عبور می کند

کل شار عبوری از سیم پیچ ۲ : $\varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi_{21}$ ⟵ قسمتی از شار سیم پیچ ۱ (ناشی از i_1) که از سیم پیچ ۲ عبور می کند.

* شار خودی سیم پیچ و شار عبوری از آن، می توانند هم جهت و یا خلاف جهت هم باشند، که در اینجا ما فقط جمع جبری را می نویسیم.

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} \\ \varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22} \end{cases} \xRightarrow[\text{خطی}]{\text{در سیستم}} \varphi = Li$$

پس داریم

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \\ \varphi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 \end{cases}$$

L_{11} و L_{22} : ضرایب خودالقایی

L_{21} و L_{12} : ضرایب القای متقابل

$L_{12} = L_{21} = M$ ضریب تزویج متقابل

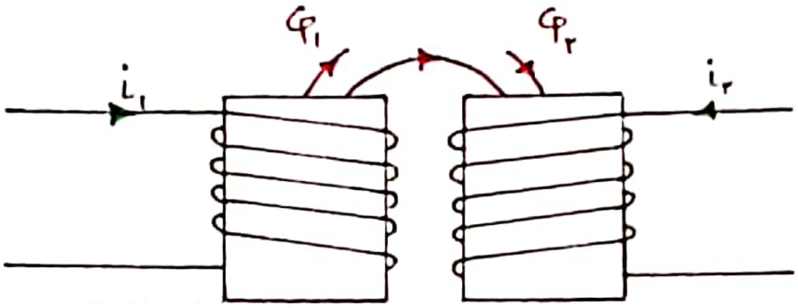
فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس القا}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

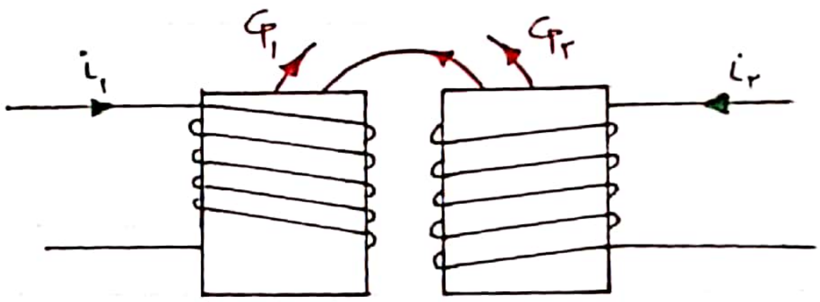
$$\vec{\varphi} = L \, \vec{I}$$

بردار شار — ماتریس القا — بردار جریان

اگر جهت جریان ها به صورتی باشد که شارها یکدیگر را تقویت کنند، $M > 0$ است.



اگر جهت جریان به صورتی باشد که شارها یکدیگر را تضعیف کنند، $M < 0$ است.



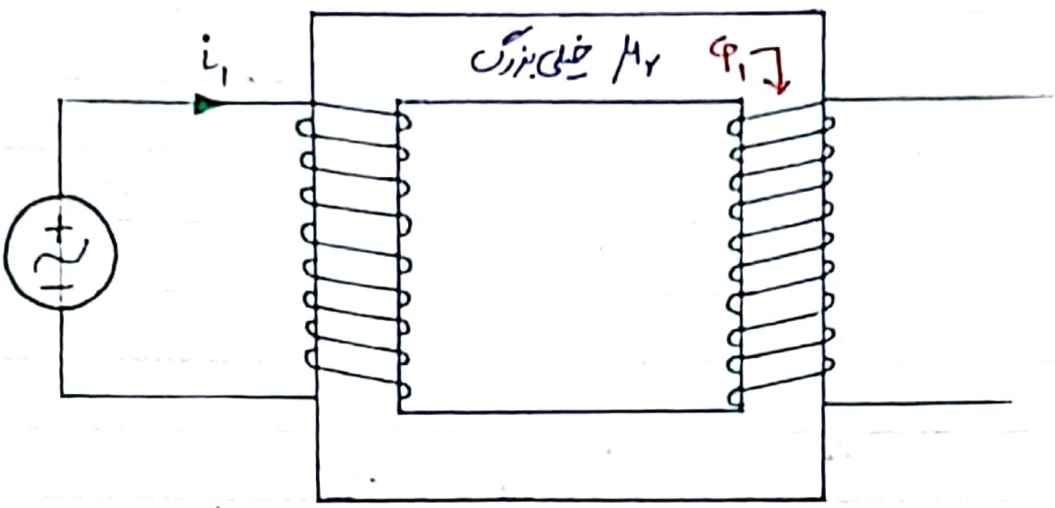
تعریف ضریب تزویج K

$$K \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \quad , \quad 0 \leqslant K \leqslant 1$$

$K = 0$ یعنی $M = 0$ پس تزویج نداریم

$K = 1$ یعنی تزویج صددرصدی (هر چه شار از یکی عبور کند، از دیگری هم عبور کند)

مثال برای وقتی که تزویج تقریبا صد در صد است :



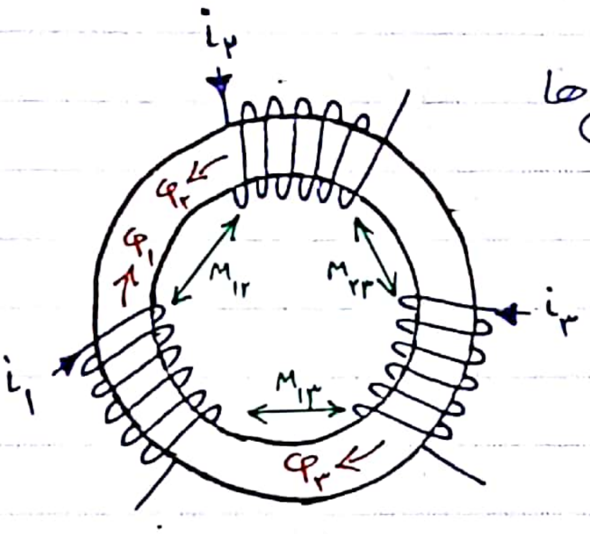
تزویج نزدیک به ٪۱۰۰ می‌شود $(K \to 1)$

$$\mu_{r_1} \gg \mu_{r_2} \xrightarrow[\text{یکسان باشد}]{\text{اگر شرایط}} \mathcal{R}_1 \ll \mathcal{R}_1$$

$$\mathcal{R} = \frac{L}{\mu_0 \mu_r A}$$ رلوکتانس (مقاومت مغناطیسی)

قاعده‌ی علامت گذاری برای مدارهای تزویج

کاربرد : جای از نمایش جهت های پیچش سیم پیچ ها



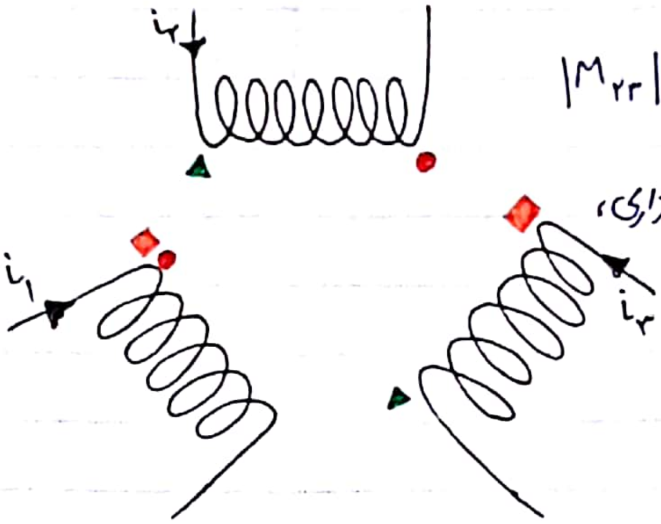
ماتریس القا $L = \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$

$M_{12} = M_{21}$, $M_{13} = M_{31}$, $M_{23} = M_{32}$

با توجه به جهت شارها $\rightarrow \begin{cases} M_{12} < 0 \\ M_{23} < 0 \\ M_{13} > 0 \end{cases}$

قانون نقطه‌گذاری: در مجاورت یکی از سرهای هر جفت سیم پیچ تزویجی نمادهای مشابهی را طوری قرار می‌دهید که در صورت ورود جریان از این سرها، شارهای یکدیگر را تقویت کنند.

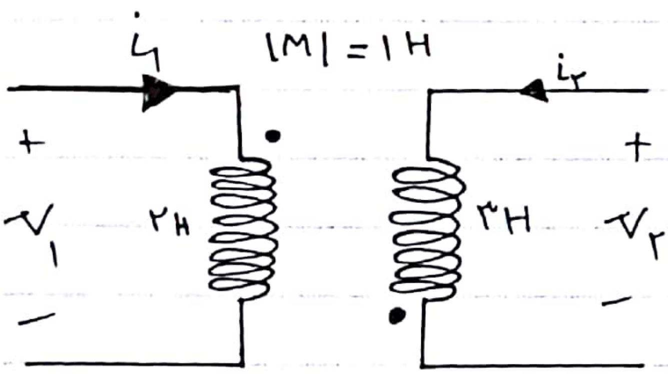
اعمال قاعده‌ی نقطه‌گذاری روی مدار مغناطیسی شکل قبل:



با دادن مقادیر $|M_{12}|$ و $|M_{13}|$ و $|M_{23}|$ و استفاده از مدار رسم شده با قاعده نقطه‌گذاری، اطلاعات کافی داده شده است.

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{11} & -|M_{12}| & +|M_{13}|\\ -|M_{12}| & L_{22} & -|M_{23}|\\ |M_{13}| & -|M_{23}| & L_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix}$$

حالت ساده:



$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix}$$

بررسی مدارهای تزویج در حالت دائمی سینوسی

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\text{حالت دائمی سینوسی}} V_L = jL\omega I_L$$

$$v_L(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$ در مدار خطی $\varphi = Li$

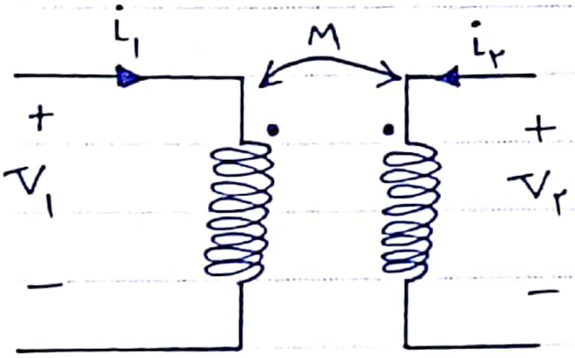
$$\varphi_1 = L_{11}i_1 + \underbrace{M}_{L_{12}}i_2 \quad , \quad v_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \Rightarrow v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \xrightarrow{\text{حالت دائمی سینوسی}} V_1 = jL_{11}\omega I_1 + jM\omega I_2$$

$$= j\omega(L_{11}I_1 + MI_2)$$

$$\varphi_2 = Mi_1 + L_{22}i_2$$

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} \xrightarrow{\text{حالت دائمی سینوسی}} V_2 = j\omega(MI_1 + L_{22}I_2)$$



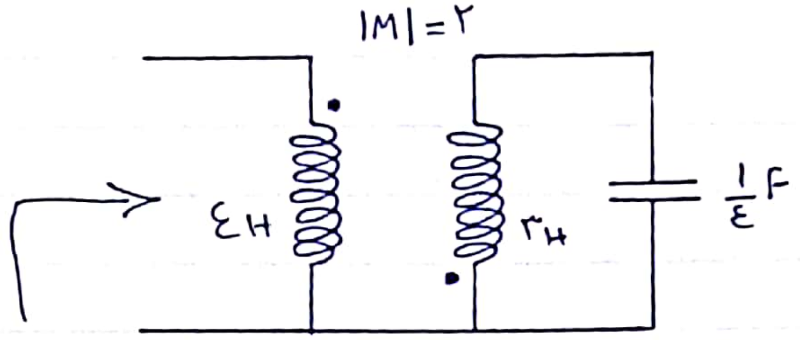
حوزه‌ی زمان
$$\begin{cases} v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

حوزه‌ی فازوری (تحلیل حالت دائمی)
$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_{11}I_1 + j\omega MI_2 \\ V_2 = j\omega MI_1 + j\omega L_{22}I_2 \end{cases}$$

بیان ماتریسی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_{\text{بردار فازورهای ولتاژ}} = j\omega \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس L}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}}_{\text{بردار فازورهای جریان}}$$

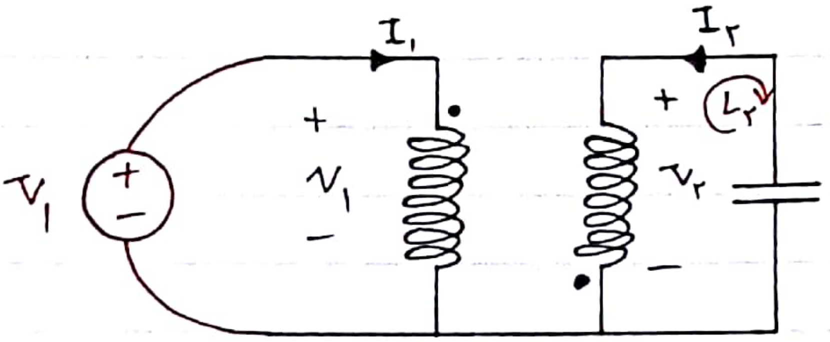
مثال :



$Z_{eq}(2j) = ?$

$\omega = 2$

تحلیل فازوری :



$$\frac{-j}{C\omega} = \frac{-j}{\frac{1}{4} \times 2} = -2j$$

$$Z_{eq} = \frac{V_1}{I_1}$$

$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_{11} I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_{22} I_2 \end{cases}$$

طبق اطلاعات مسئله $\boxed{L_{11} = 4H \ , \ L_{22} = 3H}$

$M = ?$ $\xrightarrow[\text{جستجریان ها}]{\text{باتوجه به نقاط ها و}}$ $M < 0$ $\xrightarrow{|M| = 2}$ $M = -2$

$$\begin{cases} V_1 = 8jI_1 - 4jI_2 \\ \boxed{V_2 = -4jI_1 + 6jI_2} \; * \end{cases}$$

چون برای حل معادله ها به معادله ی دیگری نیاز داریم، KVL در L_2 می نویسیم

$KVL(L_2) \Rightarrow -2jI_2 + V_2 = 0 \rightarrow V_2 = 2jI_2$

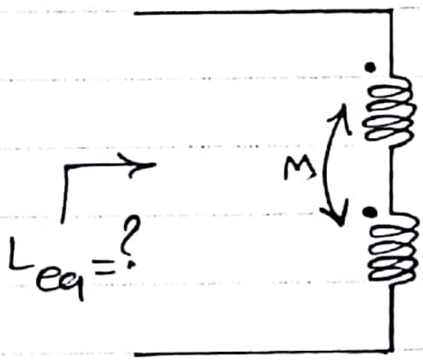
$\xrightarrow{\text{در } *} 2jI_2 = -4jI_1 + 6jI_2 \rightarrow I_1 = I_2$

$\rightarrow V_1 = 8jI_1 - 4jI_1 = 4jI_1 \rightarrow \dfrac{V_1}{I_1} = 4j$

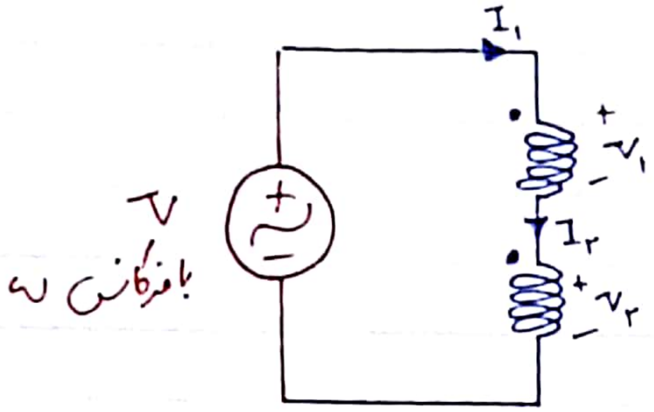
$\rightarrow Z_{eq} = 4j$

تمرین: جای یک نقطه را عوض کرده و مجدد سؤال را حل کنید

مثال:



Subject ۱۹۴
Date



$M > 0$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & |M| \\ |M| & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$I = I_1 = I_2 \rightarrow V_1 = j\omega L_{11} I_2 + j\omega |M| I_1$$

$$V_2 = j\omega |M| I_1 = j\omega L_{22} I_1$$

$$V = V_1 + V_2 = j\omega \left[L_{11} + 2|M| + L_{22} \right] I$$

برای یک سلف $\rightarrow V = j\omega L I$

طبق رابطه‌ی قبل می‌توان گفت $L_{eq} = L_{11} + 2|M| + L_{22}$

با تغییر یک سر نقطه دار $\rightarrow L_{eq} = L_{11} - 2|M| + L_{22}$

معکوس ماتریس القا (Γ)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = j\omega L I$$

ماتریس القا $L = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}$, $\vec{V} = j\omega L \vec{I}$

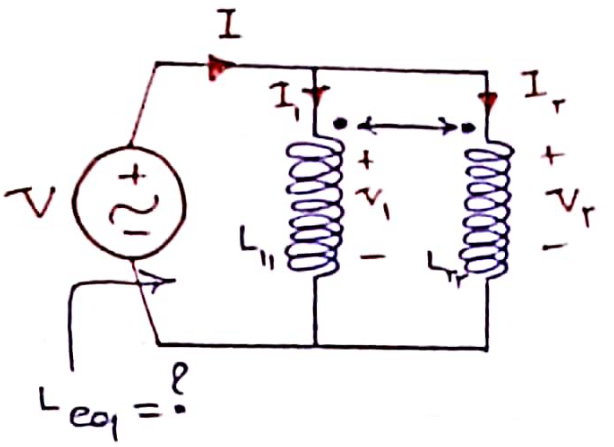
$$\rightarrow L^{-1}\vec{V} = j\omega L^{-1} \times L$$

$$\rightarrow \vec{I} = \frac{1}{j\omega} L^{-1}\vec{V} = \frac{1}{j\omega} \Gamma \vec{V}$$

$$L^{-1} = \frac{1}{L_{11}L_{22} - M^2} \begin{bmatrix} L_{22} & -M \\ -M & L_{11} \end{bmatrix}$$

در حالت دوسلف تزویج $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_{22}}{L_{11}L_{22}-M^2} & -\dfrac{M}{L_{11}L_{22}-M^2} \\ \dfrac{-M}{L_{11}L_{22}-M^2} & \dfrac{L_{11}}{L_{11}L_{22}-M^2} \end{bmatrix}$

مثال:



$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} = j\omega L \vec{I} \rightarrow \vec{I} = \frac{1}{j\omega} \Gamma \vec{V} \quad , \quad V_1 = V_2 = V$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \Gamma \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \rightarrow I_1 = \frac{1}{j\omega} \Gamma_{11} V_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_{12} V_2$$

$$I_2 = \frac{1}{j\omega} \Gamma_{21} V_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_{22} V_2$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{j\omega} \left(\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} + \Gamma_{22} \right) V$$

برای یک سلف $\quad V_L = jL\omega I \quad , \quad I = \frac{1}{j\omega L} V$

$$I = \frac{1}{j\omega} \left(\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} + \Gamma_{22} \right) V$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} + \Gamma_{22}$$

Subject ۱۹۹
Date

EX: $L_{۱۱} = ۳H$, $L_{۲۲} = ۴H$, $M = ۲$

$$\Gamma_{۱۱} = \frac{L_{۲۲}}{L_{۱۱}L_{۲۲} - M^{۲}} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Gamma_{۲۱} = \Gamma_{۱۲} = \frac{-M}{L_{۱۱}L_{۲۲} - M^{۲}} = -\frac{۲}{۸} = -\frac{۱}{۴}$$

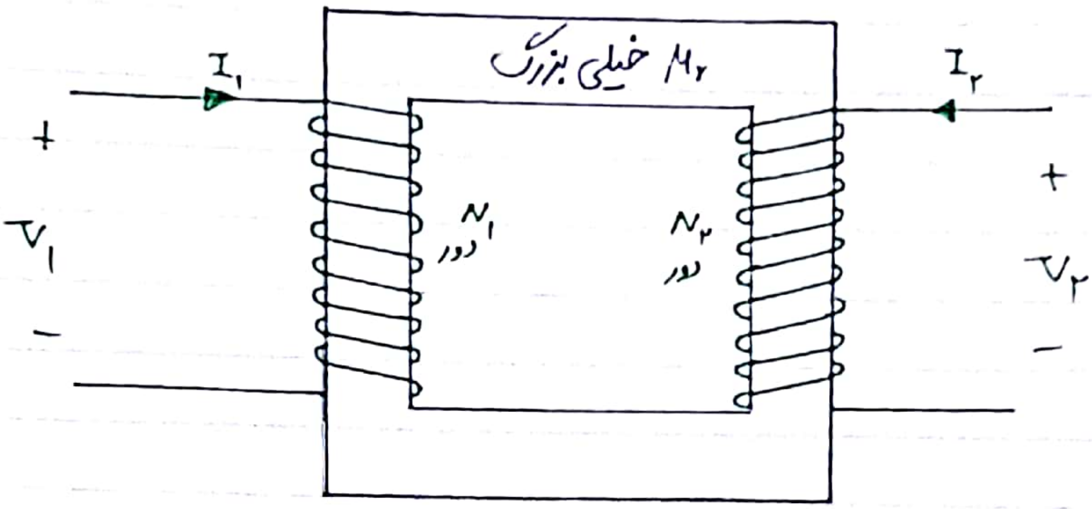
$$\Gamma_{۲۲} = \frac{L_{۲۲}}{L_{۱۱}L_{۲۲} - M^{۲}} = \frac{۳}{۸}$$

$$\frac{۱}{L_{eq}} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۸} \longrightarrow L_{eq} = \frac{۸}{۳} H$$

Subject ۲۰۰
Date سه‌شنبه ۹۷/۳/۱

معرفی ترانسفورماتور به عنوان یک المان تزویجی

ترانسفورماتور یک مدار مغناطیسی با هسته با μ_r خیلی بزرگ و شار نشتی خیلی کوچک

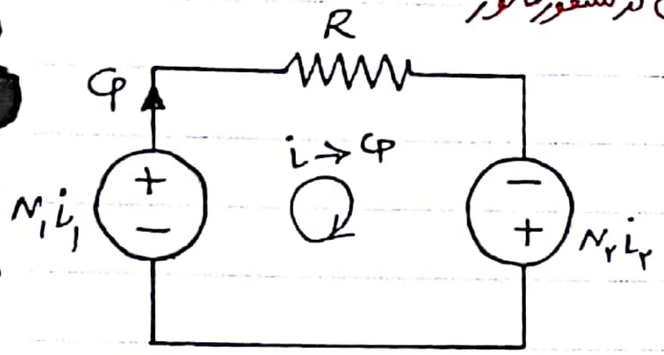


رلوکتانس $\mathcal{R} = \dfrac{L}{\mu_0 \mu_r A}$

$L \rightarrow$ طول مسیر عبور شار

$A \rightarrow$ سطح مقطع عبور شار مغناطیسی

معادل الکتریکی ترانسفورماتور



مدار مغناطیسی	معادل در مدار الکتریکی
$\mathcal{R}$	R مقاومت
φ	i جریان
$mmf = Ni$	emf معادل ولتاژ

$$-N_1 i_1 - N_2 i_2 + R\varphi = 0$$

در ترانسفورماتور نزدیک به ایده‌آل : $R \to 0$

φ محدود است

$$\left.\begin{array}{l} R \to 0 \\ \varphi \end{array}\right\} R\varphi = 0$$

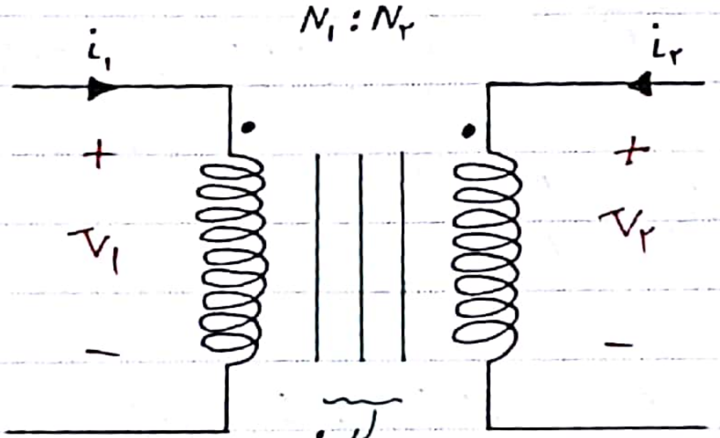
پس $\to -N_1 i_1 - N_2 i_2 = 0 \to \dfrac{i_1}{i_2} = -\dfrac{N_2}{N_1}$

ناشی از یک دور سیم پیچ $v = \dfrac{d\varphi}{dt} \to v_1 = N_1 v = N_1 \dfrac{d\varphi}{dt}$

$$v_2 = N_2 v$$

$$\to \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

رسم ترانسفورماتور با استفاده از شیوه‌ی نمادگذاری

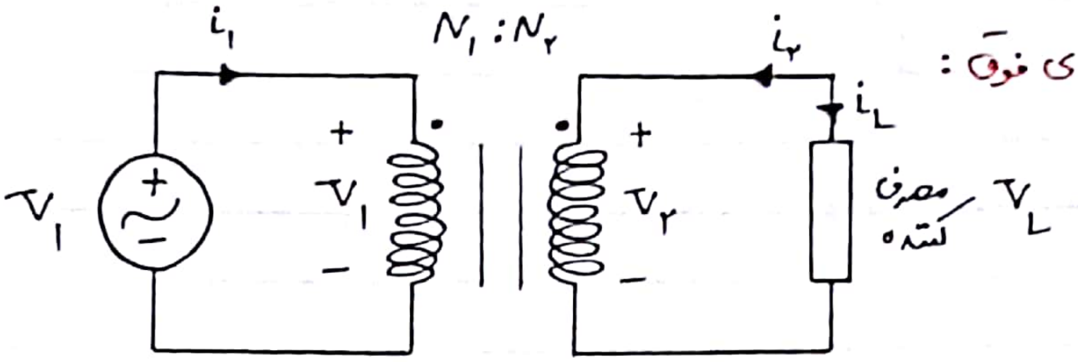


نماد هسته‌ی آهنی

روابط اصلی ترانسفورماتور ایده‌آل
$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{N_1}{N_2} \\[2mm] \dfrac{i_1}{i_2} = -\dfrac{N_2}{N_1} \end{cases}$$

* ترانسفورماتور ایده‌آل، تلفات توان ندارد

بررسی نکته‌ی فوق:



توان وارد شده به ترانسفورماتور $P_{in}(t) = v_1(t)\, i_1(t)$

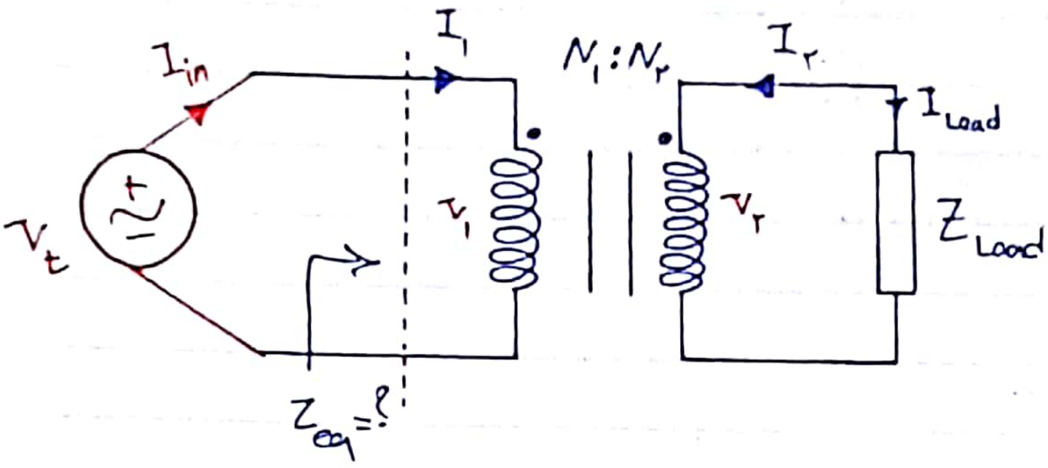
$$P_{Load}(t) = v_L(t) \cdot i_L(t) = v_2(t) \cdot \left[-i_2(t)\right]$$

$$= -v_2(t)\, i_2(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{N_2}{N_1} \Rightarrow v_2 = \dfrac{N_2}{N_1} v_1 \\[2em] \dfrac{i_2}{i_1} = -\dfrac{N_1}{N_2} \Rightarrow i_2 = \dfrac{-N_1}{N_2} i \end{array}\right\} \Rightarrow v_2 i_2 = -v_1 i_1$$

توان ورودی به ترانسفورماتور $P_{in}(t) = v_1 i_1 = -v_2 i_2 = P_{Load}(t)$ توان خروجی ترانسفورماتور

یک کاربرد ترانسفورماتور: تطبیق امپدانس



$$Z_{eq} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{V_1}{I_1} \quad , \quad Z_{Load} = \frac{V_2}{I_{Load}} = -\frac{V_2}{I_2}$$

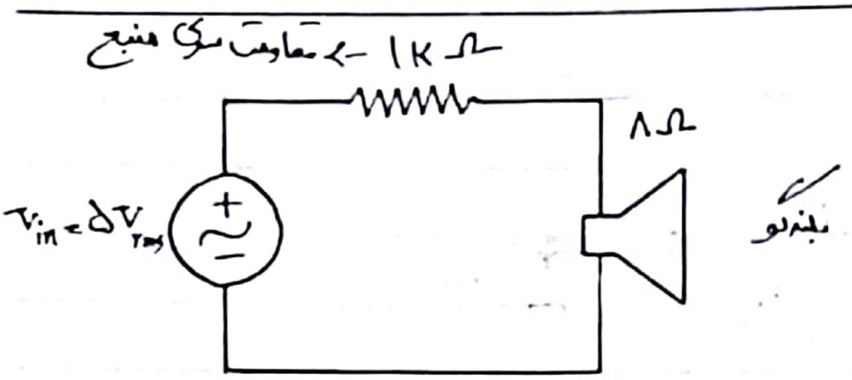
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad , \quad \frac{I_1}{I_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

$$\rightarrow V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 \qquad \rightarrow I_1 = -\frac{N_2}{N_1} I_2$$

$$Z_{eq} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{N_1}{N_2} V_2}{-\frac{N_2}{N_1} I_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{V_2}{-I_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_{Load}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = a \rightarrow Z_{eq} = a^2 Z_{Load}$$

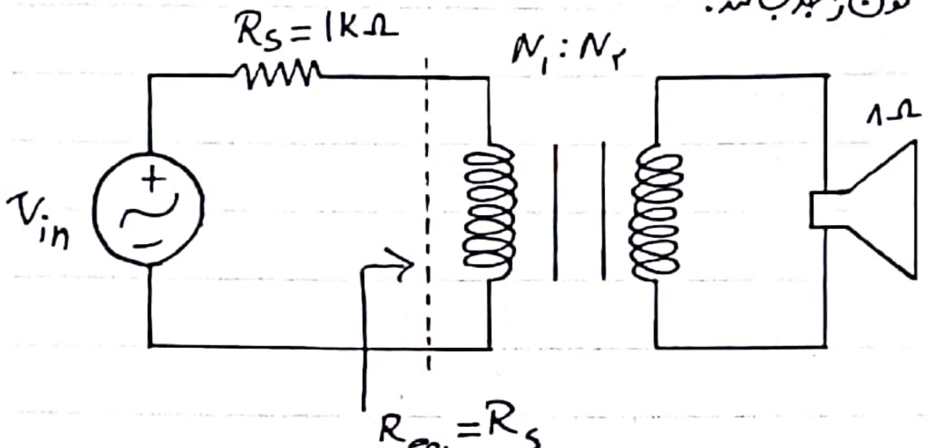
مثال:



$$I_{rms} = \frac{5}{1008\Omega}$$

توان بلندگو $P_{Load} = R_{Load}\,(I_{rms})^2 = 8 \times \left(\frac{5}{1008}\right)^2$

چه کار کنیم که بلندگو بیشترین توان را جذب کند؟

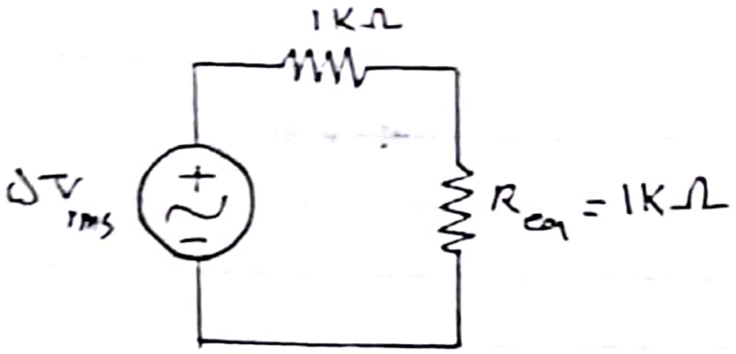


شرط انتقال بیشترین توان:

$$R_{eq} = R_s = 1K\Omega = 1000\ \Omega$$

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_{Load} = 1000 \rightarrow \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \times 8 = 1000 \rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{125}$$

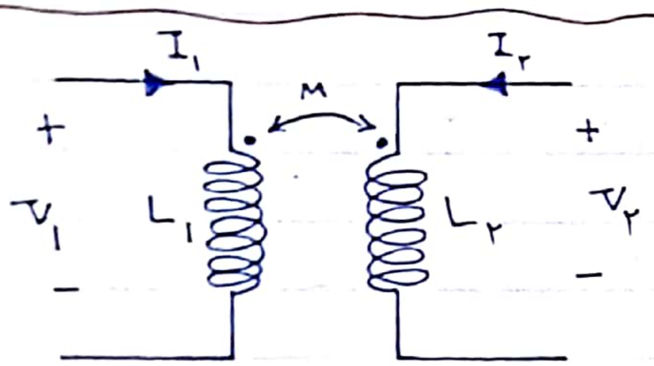
بیشترین توان جذب شده اولیه در ترانسفورماتور (که با توان بار برابر است)



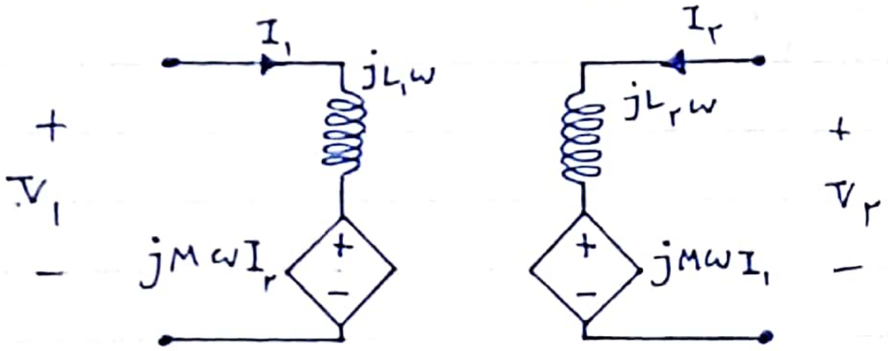
$$P_{R_{eq}} = (I_{rms}^{2}) R_{eq} = R_{eq} \times \left(\frac{5}{R_{eq} + 1K\Omega}\right)^{2}$$

= ۶,۲۵ m watt

مدل الکتریکی برای سلف های تزویجی

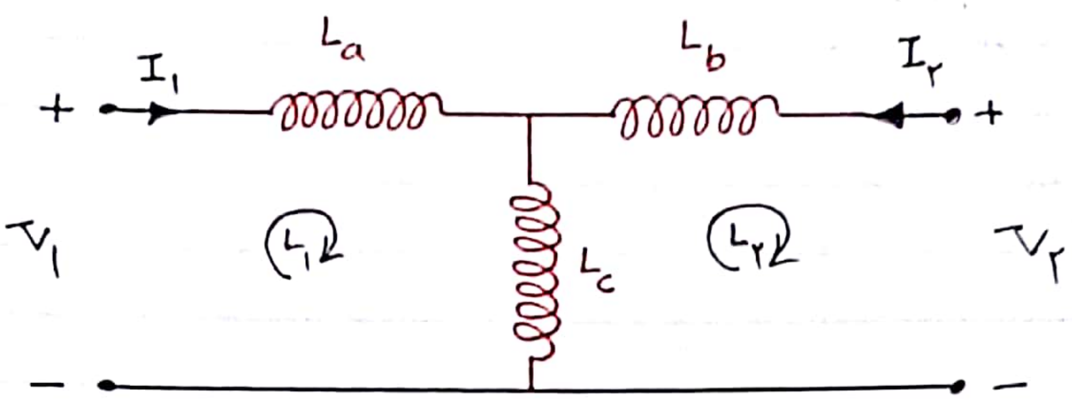


(1)
$$\begin{cases} V_1 = jL_1\omega I_1 + jM\omega I_2 \\ V_2 = jM\omega I_1 + jL_2\omega I_2 \end{cases}$$



مدل الکتریکی برای دو سلف تزویج
با منبع وابسته

مدل T



$$KVL\ (L_1) \Rightarrow -V_1 + (jL_a\omega)I_1 + jL_c\omega(I_1+I_2) = 0$$

$$* \quad \boxed{V_1 = j(L_a+L_c)\omega L_1 + jL_c\omega I_2}$$

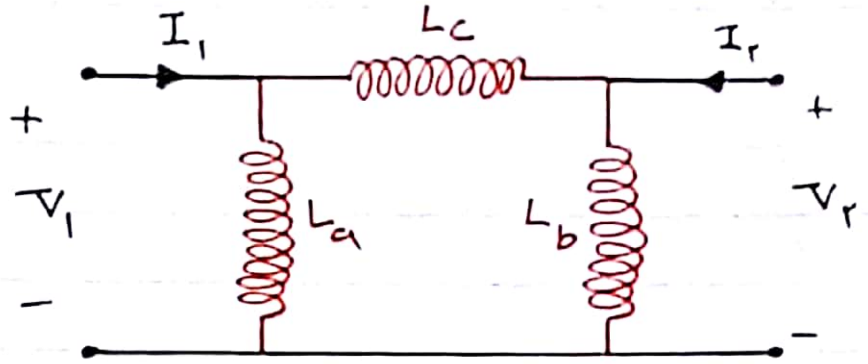
$$KVL\ (L_2) \Rightarrow V_2 = (jL_b\omega)I_2 + jL_c\omega(I_1+I_2)$$

$$** \quad \boxed{V_2 = jL_c\omega I_1 + j(L_a+L_c)\omega I_2}$$

با معادل گرفتن * و ** با معادلات ①، شرط معادل بودن دو مدار به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} L_a + L_c = L_1 \\ L_c = M \\ L_b + L_c = L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \\ L_c = M \end{array}$$

مدل T

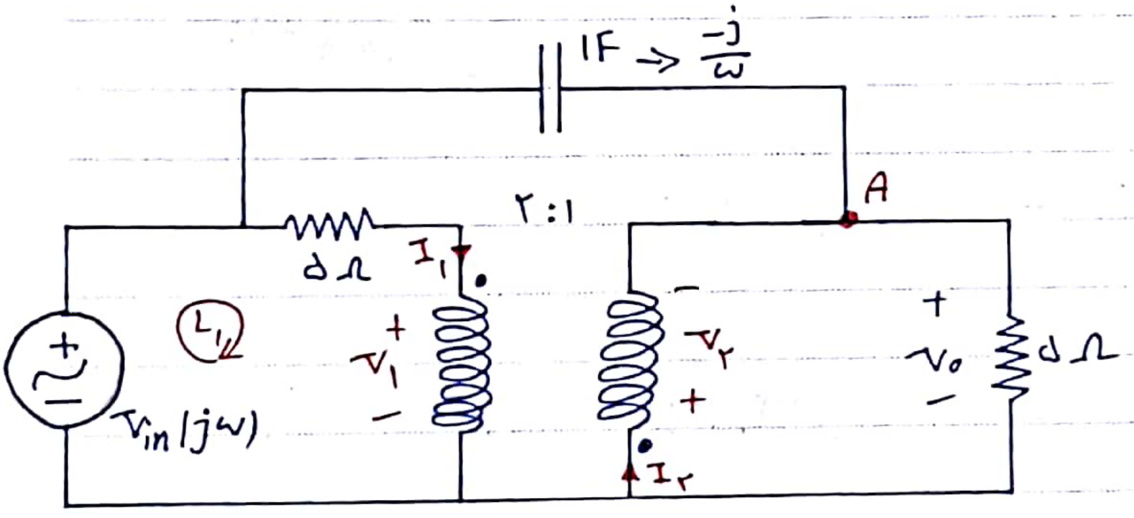


$$L_a = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} \quad , L_b = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} \quad , L_c = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M}$$

تابع شبکه

نسبت فازور خروجی به ورودی.

تابع شبکه انتقال ولتاژ در مدار زیر را بدست آورید.



$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_{in}(j\omega)}$$

Subject ۲۰۸
Date

$$\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{N_۱}{N_۲} = \frac{۲}{۱} \rightarrow V_۱ = ۲V_۲$$

$$\frac{I_۱}{I_۲} = -\frac{N_۲}{N_۱} \rightarrow \frac{I_۱}{I_۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$KCL\ (A) \Rightarrow -\frac{V_۲}{۵} - I_۲ + \frac{-V_۲ - V_{in}}{-j/\omega} = ۰ \rightarrow -V_۰ = V_۲$$

$$\boxed{\frac{V_۰}{۵} - I_۲ + j\omega V_۰ - j\omega V_{in} = ۰} \quad *$$

$$KVL\ (L_۱) \Rightarrow -V_{in} + ۵I_۱ + V_۱ = ۰ \rightarrow I_۱ = \frac{V_{in} - V_۱}{۵}$$

$$\Rightarrow I_۱ = \frac{V_{in} + ۲V_۰}{۵}$$

$$I_۲ = -۲I_۱ = -\frac{۲}{۵}(V_{in} + ۲V_۰)$$

$$* \Rightarrow \frac{V_۰}{۵} + \frac{۲}{۵}(V_{in} + ۲V_۰) + j\omega V_۰ - j\omega V_{in} = ۰$$

$$۵V_۰ + ۲V_{in} + ۵j\omega V_۰ - ۵j\omega V_{in} = ۰$$

$$\frac{V_۰}{V_{in}} = \frac{۵j\omega - ۲}{۵j\omega + ۵}$$

روح الله
بهمنیا